Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 2 / 13. März 2006 / GG

Die Binomialverteilung

1. Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit τ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0,1]$ zerfallen. Der W-raum (Ω, W) dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0,1\}$ mit dem W-maß W, für das $W(\{1\}) = x$ gilt. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der N Kerne zerfallen innerhalb der Zeit τ?" den W-raum (Ω_N, W_N) mit

   $$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$

   Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N? Hinweis:

   $$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B, \ldots \gamma \in C} f(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot \ldots \cdot h(\gamma) = \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha) \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in B} g(\beta) \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\gamma \in C} h(\gamma) \right)$$

   (c) Zeigen Sie, dass der Transport von W_N mit Z_N die *Binomialverteilung* auf $\{0, 1, .., N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0, 1, .., N\}$

   $$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi(k; N, x) := x^k (1-x)^{N-k} \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

   Die Figuren zeigen $k \mapsto W_N(Z_N^{-1}(\{k\}))$ für $N = 10$ und $N = 100$ und $x = 1/3$ und $x = 2/3$.

   (d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb der Zeit τ mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

   (e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) mit Hilfe der folgenden Ungleichung (von Chebyshev):

   $$W(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f \rangle| \geq t\}) \leq \frac{\mathcal{V}(f)}{t^2}.$$