Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 14 / 26. Juni 2006
2. Klausur / GG

---

1. Seien $\lambda, q \in \mathbb{R}$ mit $q^2 \neq 1$. Geben Sie die Menge aller maximalen Lösungen der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Differentialgleichung
$$y''(x) + y(x) = 2\lambda \cos^2(\frac{q}{2}x)$$
an. Hinweis: $\cos^2(\frac{q}{2}x) = (1 + \cos(qx))/2$.

2. Verwenden Sie die Rekursion von Blatt 10 für die Koeffizienten einer Potenzreihenlösung der Legendre'schen Differentialgleichung
$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \tag{1}$$
um jene Polynomlösung von Gleichung (1) für $n = 4$ zu bestimmen, für die $y(1) = 1$ gilt.

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und mit
$$f(t) = \lambda t \exp(-\lambda t) \text{ für } t > 0.$$

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$.

   (a) Bestimmen Sie den Gradientenvektor von f im Punkt $(1, 1)$ bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^2$, nämlich
   $$\langle (x, y), (v, w)\rangle_S = xv + yw.$$

   (b) Bestimmen Sie den Gradientenvektor von f im Punkt $(1, 1)$ bezüglich des Skalarproduktes
   $$\langle (x, y), (v, w)\rangle = 2xv + yw + xw + yv.$$

   Hinweis: $f(x, y) = \langle (x, y), (x, y)\rangle$.

Lösung:

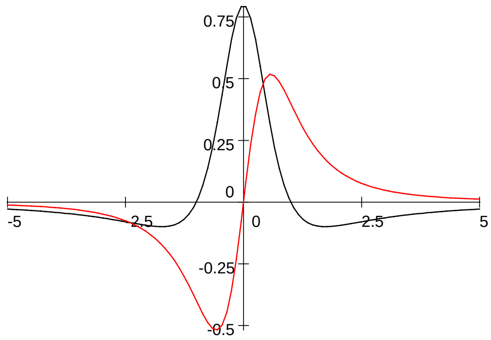
1. Mit dem Hinweis folgt für alle $x \in \mathbb{R}$
$$y''(x) + y(x) = \lambda + \lambda \cos(qx). \tag{2}$$
Eine maximale Lösung der inhomogenen Gleichung $y''(x) + y(x) = \lambda$ ist die konstante Funktion $y_1(x) = \lambda$. Eine maximale Lösung der inhomogenen Gleichung $y''(x) + y(x) = \lambda \cos(qx)$ versuche ich mit dem Ansatz $y_2(x) = K \cos(qx)$ zu finden. Einsetzen ergibt für alle $x \in \mathbb{R}$
$$K\left(-q^2 + 1\right) \cos(qx) = \lambda \cos(qx).$$
Dies gilt genau dann, wenn $K = \frac{\lambda}{1-q^2}$. Damit ist die Funktion $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = \lambda + \lambda \frac{\cos(qx)}{1 - q^2}$$
eine (partikuläre) Lösung der Differentialgleichung (2). Die Menge L aller maximalen Lösungen dieser Differentialgleichung ergibt sich somit durch Addieren von y_p zur Lösungsmenge der homogenen Gleichung, d.h. es gilt
$$L = \{\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \alpha(x) = A\cos(qx) + B\sin(qx) + y_p(x) \,|A, B \in \mathbb{R}\}.$$

2. Die Rekursionsformel lautet
$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k.$$
Sie ergibt für $n = 4$ die abbrechende Folge von geraden Koeffizienten
$$c_0 \to c_2 = -10 \cdot c_0 \to c_4 = -\frac{7}{6} \cdot c_2 \to c_6 = 0 \cdot c_4 \to \ldots$$
Die Folge der ungeraden Koeffizienten bricht nicht ab, sodass für eine Polynomlösung $c_1 = 0$ gilt. Daraus folgt $y(x) = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 = c_0\left(1 - 10x^2 + 35x^4/3\right)$. Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ folgt $c_0(1 - 10 + 35/3) = 1$, also $c_0 = 3/8$. Damit gilt
$$y(x) = \frac{3}{8}\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right).$$

3.
$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f)(\omega) &= \lambda \int_0^\infty t e^{-(\lambda+i\omega)t} dt = \frac{-\lambda}{\lambda + i\omega}\left\{\left[t e^{-(\lambda+i\omega)t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-(\lambda+i\omega)t} dt\right\} \\
&= \frac{-\lambda}{\lambda + i\omega}\left[\frac{e^{-(\lambda+i\omega)t}}{\lambda + i\omega}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{(\lambda + i\omega)^2} = \frac{\lambda(\lambda - i\omega)^2}{\left(\lambda^2 + \omega^2\right)^2}.
\end{aligned}$$
Also gilt
$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{\left(\lambda^2 + \omega^2\right)^2}\left[\lambda^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega\right].$$
Kontrolle: Da f reellwertig ist, muss $(\mathcal{F}f)(-\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega)^*$ gelten. Dies ist der Fall.

Für die reellen Sinus/Cosinus-Transformierten a, b mit
$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{a(\omega) - ib(\omega)}{2}$$
gilt somit
$$a(\omega) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\left(\lambda^2 + \omega^2\right)^2} \text{ und } b(\omega) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda^2 \omega}{\left(\lambda^2 + \omega^2\right)^2}.$$

Die folgende Figur zeigt a (in schwarz) und b (in rot) für $\lambda = 1$.



4. Sei $f = 2x^2 + y^2 + 2xy$.

(a) Für das Standardskalarprodukt gilt

$$grad\,(f) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Im Punkt p mit $x(p) = y(p) = 1$ gilt somit

$$grad_p\,(f) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $((x,y),(v,w)) \mapsto 2xv + yw + xw + yv$ gilt $f(p) = \langle p, p \rangle$. Daher folgt für den Gradienten von f bezüglich dieses Skalarproduktes $grad_p\,(f) = 2p$. Also gilt im Punkt p mit $x(p) = y(p) = 1$

$$grad_p\,(f) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter Lösungsweg geht über die Entwicklungsformel für den Gradienten nach einer allgemeinen Vektorraumbasis:

$$grad\,(f) = \sum_{i=1}^{2} e_i \left(G_{\underline{e}}^{-1} \right)^{ij} \partial_j f.$$

Es ist also die Gram'sche Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Standardbasis $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ zu berechnen. Es gilt

$$G_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ihre Inverse folgt

$$G_{\underline{e}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$grad_p\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$