Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 13 / 19. Juni 2006 / GG

Richtungsableitung, Gradient, Linienintegral

1. V sei ein reeller, 3-dimensionaler, orientierter Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Für $p_1, p_2 \in V$ sei[1]

$$\Phi : V \setminus 0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^{-3} \left[\langle p_1, p_2 \rangle - 3 \|x\|^{-2} \langle p_1, x \rangle \langle p_2, x \rangle \right].$$

Für das radiale Einheitsvektorfeld E und das Drehvektorfeld L um $\mathbb{R} \cdot p_1 \neq 0$ gilt

$$E : V \setminus 0 \to V, \quad x \mapsto \|x\|^{-1} x \text{ und } L : V \to V, \quad x \mapsto \|p_1\|^{-1} p_1 \times x.$$

Zeigen Sie für die Richtungsableitungen von Φ unter E und unter L, also z.B. für

$$E[\Phi] : V \setminus 0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\Phi(x + \varepsilon E(x)) - \Phi(x) \right] / \varepsilon =: E_x[\Phi],$$

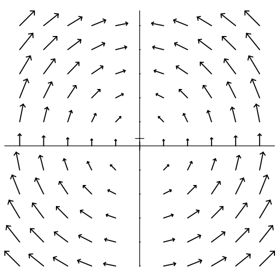
dass für alle $x \in V \setminus 0$

$$E_x[\Phi] = -3 \|x\|^{-1} \Phi(x) \text{ und } L_x[\Phi] = 3 \|x\|^{-5} \|p_1\|^{-1} \langle p_1, x \rangle \langle p_1 \times p_2, x \rangle.$$

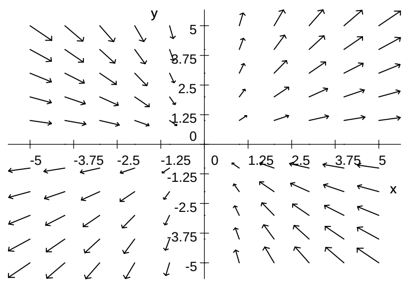
Hinweis: Zeigen und benützen Sie $E_x[\Phi] = \|x\|^{-1} \frac{d}{d\lambda} \Phi(\lambda x) |_{\lambda=1}$. Der Umweg über $d\Phi$ oder $\operatorname{grad} \Phi$ ist mühsamer. Ähnliches gilt für $L_x[\Phi]$.

2. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie $grad(f)$ der folgenden Funktionen vom Typ $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.
   (a) Sei $k_i \in V$ für $i = 1, ..., m$ und $f(p) := \sum_{i=1}^{m} \langle k_i, p \rangle^2$ für alle $p \in V$.
   (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \backslash 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.
   (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(p) = \frac{1}{r(p)} \langle e, p \rangle$ für alle $p \in U = V \backslash 0$. Die Zahl $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Die linke Figur zeigt das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$.
   (d) $f = \Phi$ mit Φ von Beispiel 1.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $X : V \to V, \quad (x, y) \mapsto \left(x^2 y, x y^2\right)$ (Rechte Figur). Berechnen Sie das Kurvenintegral von X längs $\gamma : [0, 1] \to V, \quad t \mapsto \left(1 - t, t^2\right)$.



Das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$



Das Vektorfeld $\left(x^2 y, x y^2\right)$

[1] Das ist im SI-System $4\pi\varepsilon_0$ mal der Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Dipolmomente p_1, p_2 mit dem Verbindungsvektor x.