Math. Meth 2, 2006, Blatt 12

Aufgabe 3

Gegeben ist $f(t) = e^{-\lambda|t|}\sin(\Omega t)$ mit $\lambda, \Omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Da f ungerade ist, ist nach Bemerkung 149.3 der Vorlesung auch $\mathcal{F}f$ ungerade, d.h. $(\mathcal{F}f)(-\omega) = -(\mathcal{F}\{)(\omega)$. Mit Bemerkung 148 folgt

$$\begin{aligned} a(\omega) &= (\mathcal{F}f)(\omega) + (\mathcal{F}f)(-\omega) = 0 \\ b(\omega) &= i\left[(\mathcal{F}f)(\omega) - (\mathcal{F}f)(-\omega)\right] = 2i(\mathcal{F}f)(\omega) \end{aligned}$$

Daher haben wir

$$b(\omega) = \tfrac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))dt$$

Da f ungerade, $\cos$ gerade, ist $f \cdot \cos$ ungerade und der erste Summand integriert zu null. Hingegen ist $f \cdot \sin$ eine gerade Funktion und folglich

$$b(\omega) = 2 \cdot \sqrt{2\pi} \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt$$

Mit $\sin(\Omega t)\sin(\omega t) = 1/2\left[\cos((\omega - \Omega)t) - \cos((\omega + \Omega)t)\right]$ bekommen wir

$$b(\omega) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\cos((\omega - \Omega)t) - \cos((\omega + \Omega)t)\right]dt =: \sqrt{2\pi}\left[I(\omega) - I(-\omega)\right]$$

mit $I(w) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\cos((\omega - \Omega)t)$. Dieses Integral ist leicht auszurechnen, wenn man die Definition der cos-Funktion verwendet: $\cos(x) := 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$. Allgemein geschrieben ist das Integral von der Form: $\int e^{ax}\cos(bx)dx = 1/2\int e^{ax}(e^{ibx} + e^{-ibx})dx = 1/2e^{ax}\left[\frac{1}{a+ib}e^{ibx} + \frac{1}{a-ib}e^{-ibx}\right] = e^{ax}/(a^2+b^2)\left[a\cos(bx) + b\sin(bx)\right]$, wobei der letzte Schritt folgt, wenn man die Nenner reell macht und erneut die Definitionen von $\sin$ und $\cos$ anwendet. Also bekommen wir in unserem Fall bei Integration von null bis unendlich mit $a = -\lambda$ und $b = \omega - \Omega$ für I den Ausdruck $I(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega-\Omega)^2}$. Daher

$$b(\omega) = \sqrt{2\pi}\left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \Omega)^2} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega + \Omega)^2}\right]$$

und der Audruck auf dem Aufgabenzettel folgt durch Bildung des Hauptnenners.

Aufgabe 4b

Gegeben ist f mit $f(x) = 1$ für $|x| < 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Nach Definition ist

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy =: \int_{-1}^{1} \chi(|x-y|)dy$$

mit der Funktion χ für die $\chi(x) = 1$ falls $|x| < 1$ und $\chi(x) = 0$ sonst.

a) Für $|x| > 2$ ist $|x - y| > 1$ für alle y im Integrationsintervall $[-1, 1]$, also ist dann $(f * f)(x) = 0$.

b) Für $-2 \leq x \leq 0$ gilt: $\int_{-1}^{1} \chi(|x - y|)dy = \int_{-1}^{x+1} dy = 2 + x = 2 - |x|$. Da f eine gerade Funktion ist, folgt $(f * f)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x - y))f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - (-y))f(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)f(u)du = (f * f)(x)$. Also ist $f * f$ gerade und es gilt

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{für } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ferner soll gezeigt werden, daß der Faltungssatz (147.2) erfüllt ist. Da $f * f$ gerade ist, folgt

$$[\mathcal{F}(f * f)](k) = \sqrt{2\pi} \int_{0}^{\infty} (f * f)(x) \cos(kx)dx = \sqrt{2\pi} \int_{0}^{2} (2 - x) \cos(kx)dx$$

Mittels partieller Integration und unter Verwendung von $1 - \cos(2k) = 2\sin^2(k)$ folgt schließlich

$$[\mathcal{F}(f * f)](k) = 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{\sin(k)}{k}\right)^2$$

womit durch Vergleich mit Aufgabe $2a$ der Faltungssatz (147.2) direkt bestätigt werden kann.