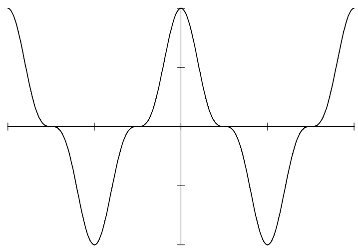
Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 11 / 29. Mai 2006 / GG

Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

1. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion $\cos^3$ das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist. D.h. zeigen Sie für alle $x \in [0, 2\pi]$

$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx) .$$

Hinweis: $\cos^3(x) = \left[\exp(ix) - \exp(-ix)\right]^3 /8$.



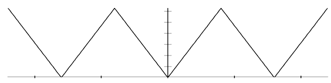
$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

2. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

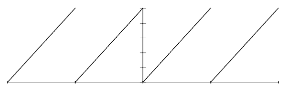
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

der folgenden 2π-periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

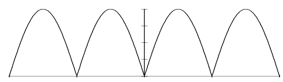
(a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ (Sägezahn)



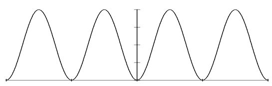
(b) $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$ (Kippschwingung)



(c) $f(x) = \left|\sin(\frac{x}{2})\right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)



(d) $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$



3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der L-periodischen Funktion f, für die $f(x) = f(-x)$ und mit $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x)/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

gilt. Skizzieren Sie die Abbildung $\frac{2\pi}{L} k \mapsto |c_k|$. Wie verändert diese sich, wenn L vergrößert wird? Konvergiert ein Fourierkoeffizient c_k bei festem L für $\varepsilon \to 0$? (δ-Kamm)