Legendresche Differentialgleichung

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann lautet die (verallgemeinerte) Legendresche Differentialgleichung für alle $x \in (-1,1)$

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y'(0) = 0$ eine gerade Funktion ist. Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y(0) = 0$ eine ungerade Funktion ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jeder Lösung y auch die gespiegelte Funktion $\Pi y\,(x) := y(-x)$ eine Lösung von (1) ist. Welche Anfangsbedingung erfüllt Πy bei $x = 0$?

2. Nach dem Entwicklungssatz hat jede maximale Lösung von Gleichung (1) eine Potenzreihenentwicklung (2) mit einem Konvergenzradius $r \geq 1$.

$$y(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k x^k \tag{2}$$

   (a) Zeigen Sie: Ist y eine maximale Lösung von (1), dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Rekursion

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k. \tag{3}$$

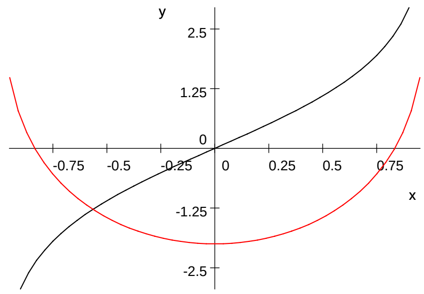
   (b) Zeigen Sie: y ist ein Polynom genau dann, wenn $\lambda = n(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und wenn $\Pi y = (-1)^n\, y$. (Da das Legendrepolynom P_n Lösung von Gleichung (1) mit $\lambda = n(n+1)$ ist, ist nach dem Eindeutigkeitssatz der Raum der Polynomlösungen durch $\mathbb{R} \cdot P_n$ gegeben.)

   (c) Sei $\lambda = 3(3+1)$. Berechnen Sie die Polynomlösung y von Gleichung (1) mit $\lim_{x \to 1} y(x) = 1$ über die Reihenformel. Überprüfen Sie, dass $y = P_3$.

   (d) Prüfen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass eine Potenzreihe (2), für deren Koeffizienten (3) gilt, tatsächlich für alle $|x| < 1$ konvergiert. Bemerkung: (Ohne Beweis) α hat genau dann eine *stetige* Fortsetzung nach $[-1,1]$, wenn y ein Polynom ist.

3. (Freiwillig) Berechnen Sie für $\lambda = n(n+1)$ mit $n = 0$ und $n = 1$ jeweils den Raum der maximalen Lösungen von Gleichung (1). Hinweis: Die Lösung P_n kann zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden. Lösung (Fig. 2):

$$\begin{aligned} L_{n=0} &= \left\{ \alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + b \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}, \\ L_{n=1} &= \left\{ \alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b \left[x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2 \right] \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$



Die Lösungen $\alpha_{0,1}$ für $n = 0$ und $n = 1$ (rot)