Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 1 / 6. März 2006 / GG

Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

1. Sei $\Omega = \{a, b, c\}$. Geben Sie die Potenzmenge von Ω an. Wieviele Elemente enthält sie? Geben Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.
2. Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge einer Menge Ω, die aus n Elementen besteht?
3. In einer Schachtel sind $2n$ nummerierte Kugeln. Die Kugeln mit den Nummern $1, \ldots n$ sind rot und jene mit den Nummern $n+1, \ldots 2n$ sind grün. Es wird erst eine, und dann noch eine Kugel wahllos aus der Schachtel gezogen, ohne dass die erste zuvor in die Schachtel zurückgelegt wird.
   (a) Zeigen Sie für den Ereignisraum Ω dieses Vorgangs $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots 2n\} \text{ und } i \neq j\}$. Wieviele Elemente enthält Ω?
   (b) Berechnen Sie mit der Gleichverteilung W auf Ω die Wahrscheinlichkeit $W(A)$ des Ereignisses A, dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $1/2$? Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} W(A) = 1/2$.
   (c) Sei B das Ereignis, dass die zuerst gezogene Kugel rot ist, und sei C das Ereignis, dass die zweitgezogene Kugel rot ist. Sind diese beiden Ereignisse stochastisch unabhängig, d.h. gilt $W(B \cap C) = W(B)\, W(C)$?
4. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel.* Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert.
   (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Würfelspiels die Wahrscheinlichkeitsfunktion an.
   (b) Die Teilmenge $A \subset \Omega$ sei das Ereignis „Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim"? Welche Wahrscheinlichkeit hat A?
   (c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade"?
   (d) $B \subset \Omega$ steht für: „Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11". Sind A und B stochastisch unabhängig, dh: gilt $W(A \cap B) = W(A)W(B)$?
   (e) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, (i, j) \mapsto i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von f:
   $$\langle f \rangle_W := \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\, f(\omega) = ? \quad \mathcal{V}(f) := \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2 = ?$$
   (f) Geben Sie für den Transport[1] W_f von W mit f die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_f auf $f(\Omega)$ an. Berechnen Sie also für jedes $x \in f(\Omega)$ die Zahl $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$. Zeigen Sie $\langle f \rangle_W = \sum_{x\in f(\Omega)} x p_f(x)$.
5. Beantworten Sie die Frage 4a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel.* Liegt wie in 4a) eine Gleichverteilung vor?

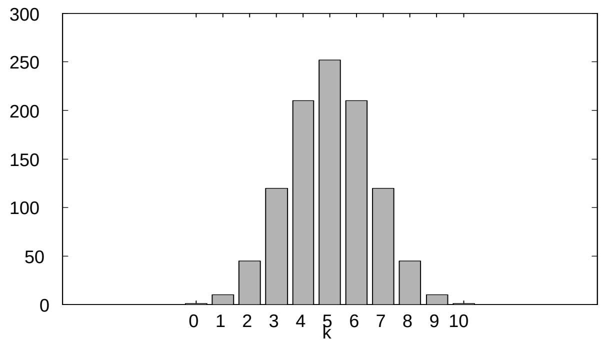
[1] Es gilt für jedes $A \subset f(\Omega)$ dass $W_f(A) = W\left(f^{-1}(A)\right)$, wobei $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$.

6. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) hat *Lotto Sechs aus 45*?

Hinweis: Eine Ziehung ist eine injektive[2] Abbildung $f : \{1, 2, ..6\} \to \{1, 2, .., 45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Sind f und g zwei solche Abbildungen mit $g(\{1, 2, ..6\}) = f(\{1, 2, ..6\})$, dann werden sie als dasselbe Ereignis aufgefasst, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ignoriert wird. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, .., 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \le N$ heißen die Zahlen

$$\left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

Binomialkoeffizienten[3]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)..1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.



[2] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \ne b$ gilt: $f(a) \ne f(b)$.

[3] Es gilt

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) x^k y^{N-k}$$