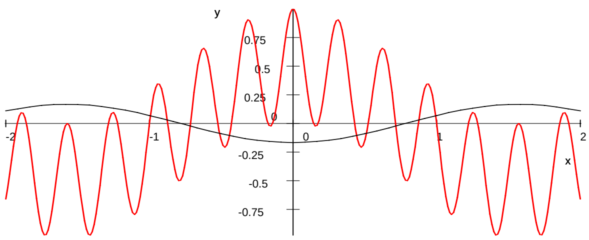
(Inhomogen) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1. Der Ansatz $y(x) = A\cos(qx)$ für eine partikuläre Lösung von $y''(x) + y(x) = \cos(qx)$ auf $\mathbb{R}$ ergibt für $q \in \mathbb{R}$ mit $q^2 \neq 1$ eine eindeutige maximale Lösung C_q dieser inhomogen linearen Differentialgleichung. Für $q^2 = 1$ leistet dasselbe der Ansatz $y(x) = Ax\sin(x)$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$C_q(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-q^2}\cos(qx) & \text{für} \quad q^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2}\sin(x) & \text{für} \quad q = \pm 1 \end{cases}.$$
Für die Differentialgleichung $y'' + y = g$ mit
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{q \in I} a_q \cos(qx)$$
mit endlicher Menge $I \subset \mathbb{R}$ und reeellen Konstanten a_q ist dann $y_g := \sum_{q\in I} a_q C_q$ eine maximale Lösung. Warum? Berechnen Sie y_g für
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(q_1 x)\cos(q_2 x) \text{ mit } q_2 > q_1 + 1 > 1.$$
Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))/2$.
Lösung:
$$y_g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((q_2+q_1)x)}{(q_2+q_1)^2 - 1} + \frac{\cos((q_2-q_1)x)}{(q_2-q_1)^2 - 1}\right)$$
Die Abbildung zeigt g (rot) und y_g (schwarz) für den Fall $q_1 = 9$ und $q_2 = 11$. Liegt im Fall der Figur Resonanz vor? Warum überträgt sich die hochfrequente Oszillation der Inhomogenität g nicht „laut und deutlich" auf die Lösung y_g?



2. Sei $\lambda > 0$ und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung der Schwingungsgleichung (1) zum Anfangswert $x(0) = x'(0) = 0$. (Die Inhomogenität nimmt ihr Maximum von $1/e$ nur bei $t = 1/\lambda$ an.)
$$y''(t) + y(t) = \lambda t \exp(-\lambda|t|) \tag{1}$$
   (a) Zeigen Sie (mit der Variation der Konstantenformel) für $t \neq 0$, dass
   $$x(t) = \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)^2}\left\{(\lambda^2 - 1)\sin t + 2\lambda\frac{t}{|t|}[\exp(-\lambda|t|) - \cos t] + (\lambda^2+1)\, t\exp(-\lambda|t|)\right\}.$$
   Hinweis: Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes gilt $x(-t) = -x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher genügt die Berechnung von $x(t)$ für alle $t > 0$.

   (b) Die retardierte Lösung x_{ret} von Gleichung (1) ist durch $\lim_{t\to-\infty} x_{ret}(t) = 0$ eindeutig bestimmt. Zeigen Sie für $t \neq 0$ und mit $\Theta(t) := 1$ für $t > 0$ und $\Theta(t) := 0$ für $t < 0$, dass
   $$x_{ret}(t) = \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)^2}\left\{\left[(\lambda^2+1)\, t + 2\lambda\frac{t}{|t|}\right]\exp(-\lambda|t|) - 4\lambda\Theta(t)\cos t\right\}.$$
   Die Amplitude der für $t \to \infty$ asymptotisch freien Schwingung ist $4\lambda^2/(\lambda^2+1)^2$. Siehe Figur 1. Die Amplitude ist maximal bei $\lambda = 1$. Figur 2 zeigt x_{ret} für $\lambda = 1$.

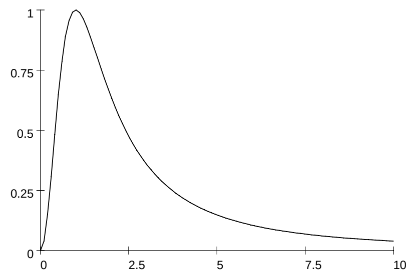


Figure 1: Asymptotische Amplitude

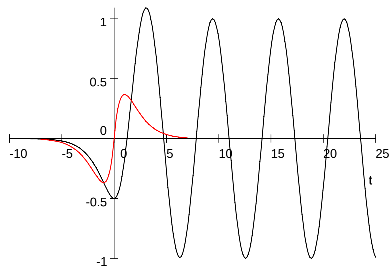


Figure 2: $x_{ret}(t)$ für $\lambda = 1$ und $t \exp(-|t|)$

3. I sei ein offenes, reelles Intervall. Die Funktionen $p : I \to \mathbb{R}$ und $q : I \to \mathbb{R}$ seien stetig und $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ seien Lösungen von

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

Sei $W : I \to \mathbb{R}$ die Wronskideterminante von y_1 und y_2.

(a) Zeigen Sie zunächst $W' = -pW$. Dann beweisen Sie: Aus $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$ folgt, dass $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

(b) Sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von (2), für das $y_1(x_0) \neq 0, y_2(x_0) = 0$ und $W(x_0) = 1$ gilt. Dann existiert eine Umgebung $J \subset I$ von x_0 mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Leiten Sie aus

$$W(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)$$

die folgende Integraldarstellung von $y_2(x)$

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1(\xi)^2} \exp\left(-\int_{x_0}^{\xi} p(t)dt\right) d\xi$$

für $x \in J$ ab.

(c) Formulieren Sie Gleichung (2) als (nichtautonomes) lineares System erster Ordnung $v' = A(x)v$ auf $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$; geben Sie also die Abbildung $A : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann heißt Gleichung (3) parameterbereinigte gedämpfte Schwingungsgleichung

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie mittels Exponentialansatzes ein Fundamentalsystem von (3). Unterscheiden Sie dabei die 3 Fälle $0 \leq \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des gefundenen Lösungspaares mit der Wronskideterminante.

(b) Benützen Sie das Verfahren von Beispiel 3), um für $\alpha = 1$ aus der Lösung $y_1(x) = \exp(-x)$ eine zweite linear unabhängige Lösung zu erhalten.