Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 8 / 10. Mai 2005 / PG&GG
1. Klausur, HS A, 13:30 - 15:30 Uhr

---

1. **Gaußverteilung in der Ebene:**
   Ein Dartspieler trifft in den $\mathbb{R}^2$ mit dem W-Maß
   $$W\left(\{(x,y) \mid x<a, y<b\}\right) = N \int_{-\infty}^{a} \left(\int_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) dy \right) dx.$$
   Die für das Spiel entscheidende stochastische Variable ist $r\,(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $A_R := \{(x,y) \mid r\,(x,y) < R\}$?
   (b) Welche Dichte hat der Transport W_r?
   (c) Welchen Wert hat N?
   (d) Welchen Wert hat $W\,(A_R)$ für $R=1$ bei $\sigma = 1$?
   (e) Wie ändert sich σ, wenn der Spieler besser wird?

2. **Orthogonale Kurvenscharen:**
   Sei $C \in \mathbb{R}$. Für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $h(x) = Cx^2$ gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ die Gleichung $h'(x) = 2h(x)/x$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f_+(x,y)$ mit
   $$f_+ : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 2y/x$$
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung α_+ der Differentialgleichung $y' = f_+(x,y)$ mit
   $$f_+ : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 2y/x$$
   zum Anfangswert $x_0 = 1$ und $y_0 = a \in \mathbb{R}$.
   (c) Bestimmen Sie die maximale Lösung α_- der Differentialgleichung $y' = f_-(x,y)$ mit
   $$f_- : \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 2y/x$$
   zum Anfangswert $x_0 = -1$ und $y_0 = b \in \mathbb{R}$.
   (d) Zeigen Sie, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, für die $\alpha_-(x) = \alpha(x)$ für alle $x<0$ und $\alpha_+(x) = \alpha(x)$ für alle $x>0$ gilt. Für welche Werte a und b gilt $\alpha = h$?
   (e) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, schneide jede der Funktionen h mit $C>0$ senkrecht. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$
   $$g'(x) = -x/2g(x).$$
   (f) Sei $d>0$. Bestimmen Sie die maximale Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert $(0,d)$.