Gewöhnliche Differentialgleichungen:
1. Ordnung, inhomogen linear, Variation der Konstanten

1. Lösen Sie Bsp. 2b) von Blatt 5 mit der Variation der Konstantenformel.

2. An den Enden eines Drahtes mit dem Widerstand $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

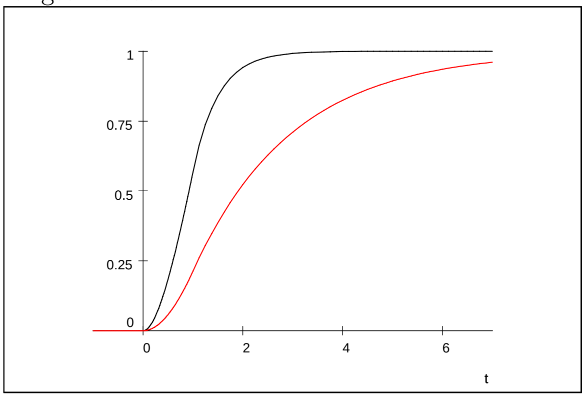
Berechnen Sie die maximale Lösung von (1) zur Anfangsbedingung $I(0) = 0$ für die Inhomogenität $U = U_e$ (stetiger Einschaltvorgang), wobei

$$U_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T}t & \text{für } 0 \le t < T \\ U_0 & \text{für } T \le t \end{cases}$$

mit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \le t < T$ und $T \le t$ inhomogen linear an und ermitteln Sie die unbestimmten Konstanten aus der Differentialgleichung. Addieren Sie dann die allgemeine Lösung der homogenenen Gleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung. Lösen Sie das Problem zum Vergleich auch mit der Variation der Konstantenformel. Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0\frac{\tau}{T}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \le t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) & \text{für } T \le t \end{cases}$$

mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (durchgezogen/schwarz) bzw. $\tau = 2$ (strichliert/rot). Der Strom im Schaltkreis mit der höheren Induktivität baut sich also langsamer auf.



3. Die radiale Komponentenfunktion $r \mapsto E_r$ eines kugelsymmetrischen, statischen elektrischen Feldes ist eine Lösung der Diffgleichung $y' = f(x, y)$ mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\frac{2y}{x} + g(x).$$

Hier ist $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. ($g = \rho/4\pi\varepsilon_0$ für die Ladungsdichte ρ.) Die Differentialgleichung ist also inhomogen linear.

[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

(a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ gilt:

$$L = \left\{ \alpha_C : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \left(C + \int\limits_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Seien $g_0 \in \mathbb{R}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie die Funktion $\alpha_0 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi$ für die (unstetige!) Ladungsdichte $4\pi\varepsilon_0 g$ einer homogen geladenen Kugel vom Radius R mit

$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{für } 0 < x < R \\ 0 & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Skizzieren Sie den Graphen von α_0. Wo ist der Betrag von α_0 maximal? Zeigen Sie, dass α_0 auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig ist, und dass für $x \neq R$

$$\alpha_0'(x) = -\frac{2\alpha_0(x)}{x} + g(x)$$

gilt. *Bemerkung*: Das Schwerkraftfeld, mit dem die Erde an einer Masse m zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch α_0 gegeben. Die Funktion α_0 gibt also auch über die Schwerkraft im Erdinneren Aufschluss.