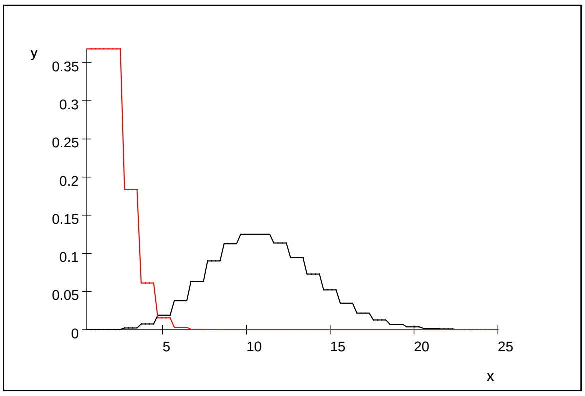
## Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit, Poissonverteilung

1. Ein ungezinkter Würfel wird $n$ mal geworfen. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat der Mittelwert der geworfenen Augenzahlen? *Lösung: der Erwartungswert ist* $7/2$ *und die Varianz ist* $35/12n$*.* Schätzen Sie im Fall $n = 100$ mit der Cehbyshevungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, einen Mittelwert kleiner gleich 3 oder größer gleich 4 zu erwürfeln. *Lösung:* $W < 11,7\%$. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat das Produkt der geworfenen Augenzahlen bei $n$ Würfen? Lösung: der Erwartungswert ist $(7/2)^n$ und die Varianz ist $(7 \cdot 13/6)^n - (7/2)^{2n}$. Beachte: $7 \cdot 13/6 > (7/2)^2$.

2. Ein Zufallsexperiment hat die zwei möglichen Ausgänge $A$ und $B$. Die Wahrscheinlichkeit des Ausganges $B$ sei $x$. Wird das Experiment $N$ mal wiederholt, dann bezeichnet $N_B$ die Anzahl der Experimente mit Ausgang $B$. Die Chebyshevungleichung zur stochstischen Variable $N_B$ gibt eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die *Häufigkeit* des Ausgangs $B$, nämlich $N_B/N$, von $x$ um mehr als $\varepsilon x$ abweicht. $(\varepsilon > 0)$ Berechnen Sie diese Schranke für $N = 10^{22}, x = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der $W$-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
$$p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto W(\{n\}) = \frac{\delta^n \exp(-\delta)}{n!}.$$
Rechnen Sie nach:
   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2 \cdot \mathbb{N}_0) = e^{-\delta}\cosh(\delta) > 1/2, W(2 \cdot \mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta}\sinh(\delta)$.[1]
   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0} \rangle = \delta$.
   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach $\delta$.
   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$gilt $\langle f \rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.
   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0} \rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind $f$ und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter $W$ stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt den Graphen von $p_\delta$ für $\delta = 10$ (durchgezogen) und für $\delta = 1$.




[1] $2 \cdot \mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$