Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 2 / 14. März 2005 / GG

Binomialverteilung, Geometrische Verteilung

1. Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit τ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0,1]$ zerfallen. Der W-raum (Ω, W) dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0,1\}$ mit dem W-maß W, für das $W(\{1\}) = x$ gilt. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der N Kerne zerfallen innerhalb der Zeit τ?" den W-raum (Ω_N, W_N) mit
   $$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$
   Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N? Hinweis:
   $$\sum_{\alpha\in A, \beta\in B, \ldots \gamma\in C} f(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot\ldots\cdot h(\gamma) = \left(\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)\right)\cdot\left(\sum_{\beta\in B} g(\beta)\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{\gamma\in C} h(\gamma)\right)$$

   (c) Zeigen Sie, dass der Transport von W_N mit Z_N die *Binomialverteilung* auf $\{0,1,..,N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0,1,..,N\}$
   $$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi\,(k; N, x) := x^k (1-x)^{N-k} \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$
   Die Figuren zeigen die Binomialverteilung $k \mapsto W_N(Z_N^{-1}(\{k\}))$ für $N = 10$ und $N = 100$ und $x = 1/3$ und $x = 2/3$.

   (d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb der Zeit τ mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

   (e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) an der Chebyshev Ungleichung[1].

2. Ein instabiler Atomkern, zerfalle unabhängig von seinem Alter in einer Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1-x) \in]0,1[$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden überlebt und dann bis zum Zeitpunkt $n+1$ zerfällt, ist $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$. (Geometrische Verteilung zum Parameter x)

   (a) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern vor der Zeit $N+1$? Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$?

   (b) Die stochastische Variable $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$ heißt Lebensdauer. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat τ? Hinweis:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (c) Skizzieren Sie den Graphen der Verteilung p (von τ).

   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern, der den Zeitpunkt M erlebt, bis zum Zeitpunkt $M+m$? Hinweis: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A\cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq M\}$ ist zu ermitteln. Sind A und B stochastisch unabhängig? Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern im Intervall $M \leq n < M+m$?

---

[1] Für eine reelle stochastische Variable f auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) sagt diese
$$W(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f\rangle| \geq t\}) \leq \mathcal{V}(f)t^{-2}.$$

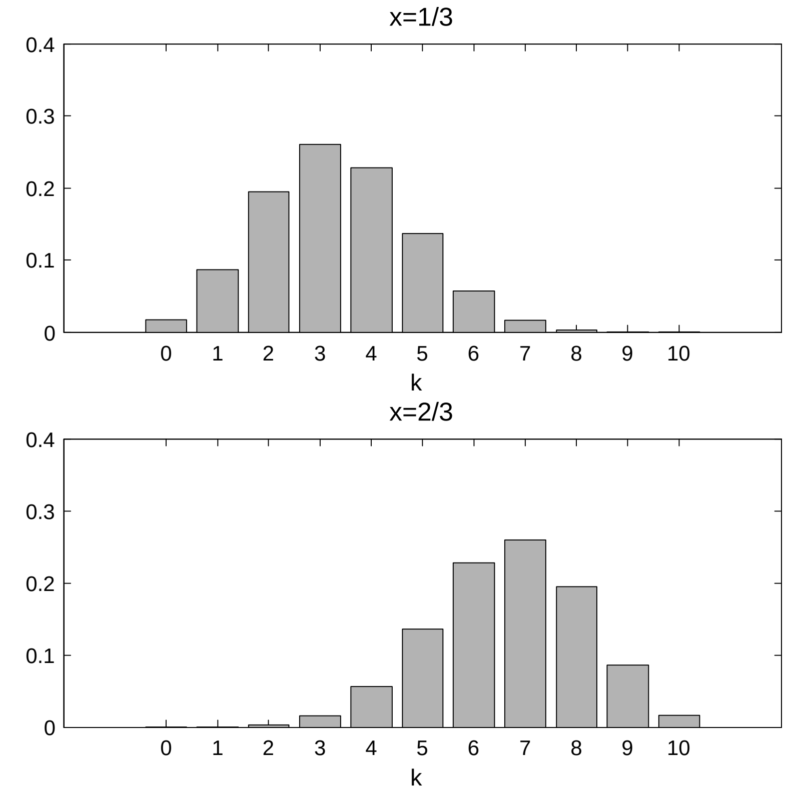

Figure 1:

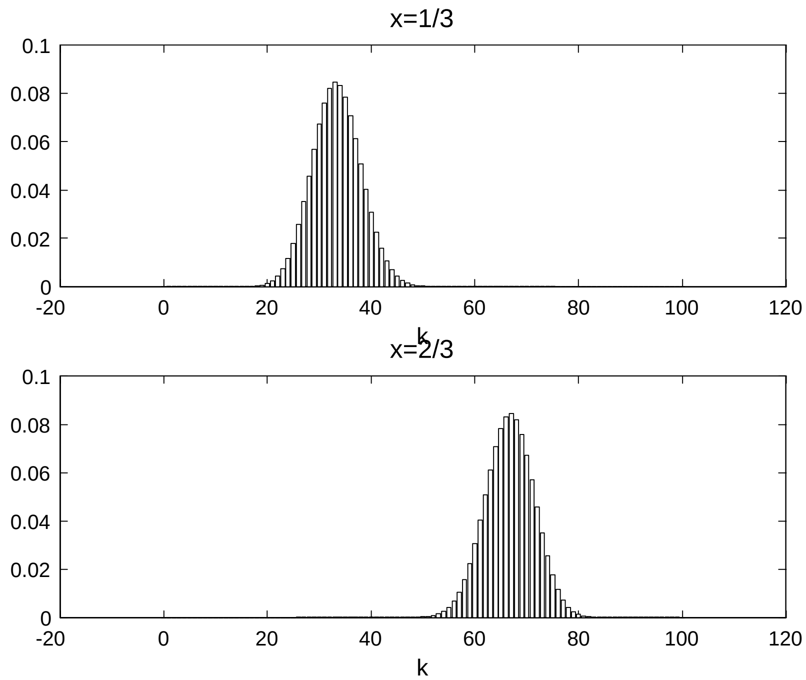

Figure 2: