

Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

1. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion \cos^3 das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist.
2. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

der folgenden 2π -periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

- (a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ (Sägezahn)
 - (b) $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$ (Kippschwingung)
 - (c) $f(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)
 - (d) $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der L -periodischen Funktion f , für die $f(x) = f(-x)$ und mit $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x)/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

gilt. Skizzieren Sie die Abbildung $\frac{2\pi}{L}k \mapsto |c_k|$. Wie verändert diese sich, wenn L vergrößert wird? Konvergiert ein Fourierkoeffizient c_k bei festem L für $\varepsilon \rightarrow 0$? (δ -Kamm)