Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 10 / 30. Mai 2005 / GG

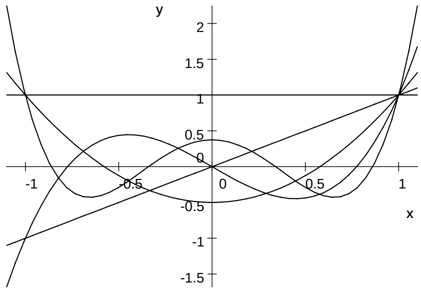
Legendresche Differentialgleichung

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Legendrepolynom $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]$$

definiert. Zeigen Sie

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$



Die Legendrepolynome $P_0, \ldots P_4$

2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann lautet die Legendresche Differentialgleichung für alle $x \in (-1, 1)$

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y'(0) = 0$ eine gerade Funktion ist. Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y(0) = 0$ eine ungerade Funktion ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jeder Lösung α auch die gespiegelte Funktion $\Pi\alpha\,(x) := \alpha(-x)$ eine Lösung von (1) ist.

3. Nach dem Entwicklungssatz hat jede maximale Lösung von Gleichung (1) eine Potenzreihenentwicklung (2) mit einem Konvergenzradius $r \geq 1$. Warum?

$$\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k x^k \tag{2}$$

   (a) Zeigen Sie: Ist α maximale Lösung von (1), dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsformel

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k. \tag{3}$$

   (b) Zeigen Sie: α ist ein Polynom genau dann, wenn $\Pi\alpha = (-1)^n \alpha$. (Also ist der Raum der Polynomlösungen eindimensional.)

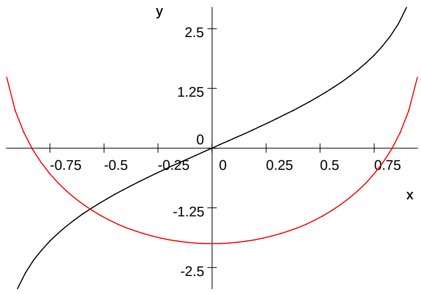
   (c) Zeigen Sie: Ist α ein Polynom, dann ist es ein Vielfaches von P_n.

   (d) Prüfen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass eine Potenzreihe (2), für deren Koeffizienten (3) gilt, tatsächlich für alle $|x| < 1$ konvergiert.

   Bemerkung: (Ohne Beweis) α hat genau dann eine *stetige* Fortsetzung nach $[-1, 1]$, wenn α ein Polynom ist.

4. Berechnen Sie für $n=0$ und $n=1$ jeweils den Raum der maximalen Lösungen von Gleichung (1). Hinweis: Die Lösung P_n kann mit der Methode von Beispiel 3), Blatt 9) zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden. Lösung (Fig. 2):

$$\begin{aligned} L_{n=0} &= \left\{\alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + b\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\right\}, \\ L_{n=1} &= \left\{\alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b\left[x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\right] \mid a,b \in \mathbb{R}^2\right\}. \end{aligned}$$



Die Lösungen $\alpha_{0,1}$ für $n=0$ und $n=1$ (rot)

5. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ mit $r := |\mathbf{x}|$, und $r_0 := |\mathbf{y}|$. Ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, dann gilt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}.$$

Behauptung[1]: Für $-1 < \lambda < 1$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\,\lambda^n.$$

Kontrollieren Sie diese Behauptung an den ersten 3 Summanden unter Verwendung der Taylorreihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots \text{für } -1 < x \leq 1.$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \quad \text{für } r_0 < r.$$

6. Sei $e_k : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $B_n := (e_k)_{k \leq n}$ ist eine geordnete Basis des Vektorraums V_n aller reellen Polynome auf $[-1,1]$, deren Grad kleiner oder gleich n ist. Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}([-1,1])$ aller stetigen Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ ist durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Wenden Sie auf die Basis B_2 von V_2 das Gram-Schmidt Verfahren zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ an. Kontrollieren Sie, dass dies auf die Basis $\left(\sqrt{k+1/2}P_k\right)_{0\leq k\leq 2}$ von V_2 führt.

[1] Der Beweis folgt in der Vorlesung Mathematische Methoden der Physik II.