**Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 1/ 7. März 2005/ GG**

---

**Endliche Wahrscheinlichkeitsräume, stochastische Variable**

1. In einer Schachtel sind $2n$ Kugeln. Sie sind von 1 bis $2n$ durchnummeriert. Die Kugeln mit den Nummern $1, \ldots n$ sind rot und jene mit den Nummern $n+1, \ldots 2n$ sind grün. Es wird erst eine und dann noch eine Kugel wahllos aus der Schachtel gezogen, ohne dass die erste zuvor in die Schachtel zurückgelegt wird.

   (a) Überlegen Sie, dass der Ereignisraum dieses Vorgangs die Menge $\Omega$ ist.

   $$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1, \ldots 2n\} \text{ und } i \neq j\}$$

   Wieviele Elemente hat $\Omega$?

   (b) Berechnen Sie zur Gleichverteilung $W$ auf $\Omega$ die Wahrscheinlichkeit $W(A)$ des Ereignisses $A$, dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 1/2?

   (c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} W(A) = 1/2$.

   (d) Sei $B$ das Ereignis, dass die zuerst gezogene Kugel rot ist, und sei $C$ das Ereignis, dass die zweitgezogene Kugel rot ist. Sind diese beiden Ereignisse stochastisch unabhängig? Untersuchen Sie also ob

   $$W(B \cap C) = W(B)\, W(C)\,.$$

2. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert. Ein Elementarereignis dieses Spiels ist somit ein Paar $(i,j)$ von Augenzahlen $i,j \in \{1,..,6\}$.

   (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, W)$ dieses Würfelspiels die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\omega) := W(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ an.

   (b) Die Teilmenge $A \subset \Omega$ steht für das Ereignis „Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim"? Welche Wahrscheinlichkeit hat $A$?

   (c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade"?

   (d) $B \subset \Omega$ steht für: „Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11". Sind $A$ und $B$ stochastisch unabhängig, dh: gilt $W(A \cap B) = W(A)W(B)$?

   (e) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, (i,j) \mapsto i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $f$:

   $$\langle f \rangle_W = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\, f(\omega), \quad \mathcal{V}(f) = \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2\,.$$

   (f) Geben Sie für den Transport[1] $W_f$ von $W$ mit $f$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_f$ auf $f(\Omega)$ an. Berechnen Sie also für jedes $x \in f(\Omega)$ die Zahl $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$. Zeigen Sie $\langle f \rangle_W = \sum_{x \in f(\Omega)} x p_f(x)$.

3. Beantworten Sie die Frage 1a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel.* Liegt wie in 1a) eine Gleichverteilung vor?

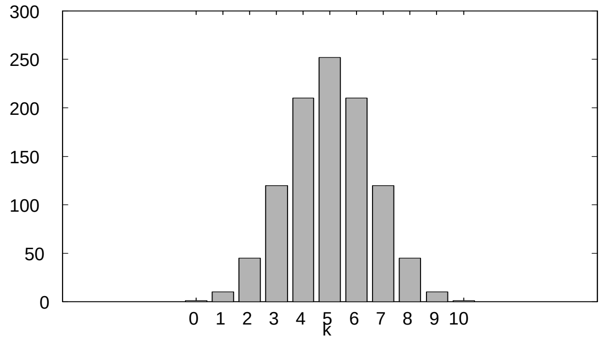
---

[1] Es gilt für jedes $A \subset f(\Omega)$ dass $W_f(A) = W\left(f^{-1}(A)\right)$, wobei $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$.

4. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum hat *Lotto Sechs aus 45*? Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Elementarereignis? Hinweis: Eine Ziehung ist eine injektive[2] Abbildung $f : \{1, 2, ..6\} \to \{1, 2, .., 45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Sind $f$ und $g$ zwei solche Abbildungen mit $g(\{1, 2, ..6\}) = f(\{1, 2, ..6\})$, dann werden sie als dasselbe Ereignis aufgefasst, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ignoriert wird. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, .., 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \leq N$ heißen die Zahlen

$$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

Binomialkoeffizienten[3]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)..1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.




[2] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

[3] Es gilt

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k}$$