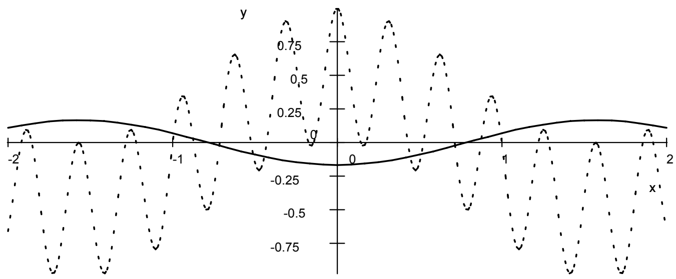
9. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 17. Mai 2004 / GG

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1. Der Ansatz $y(x) = A\cos(qx)$ für eine partikuläre Lösung von $y''(x) + y(x) = \cos(qx)$ auf $\mathbb{R}$ ergibt für $q \in \mathbb{R}$ mit $q^2 \neq 1$ eine eindeutige maximale Lösung C_q dieser inhomogen linearen Differentialgleichung. Für $q^2 = 1$ leistet dasselbe der Ansatz $y(x) = Ax\sin(x)$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$C_q(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-q^2}\cos(qx) & \text{für} \quad q^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2}\sin(x) & \text{für} \quad q = \pm 1 \end{cases} .$$
Für die Differentialgleichung $y'' + y = g$ mit
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{q \in I} a_q \cos(qx)$$
mit endlicher Menge $I \subset \mathbb{R}$ und reeellen Konstanten a_q ist dann $y_g := \sum_{q \in I} a_q C_q$ eine maximale Lösung. Warum? Berechnen Sie y_g für
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(q_1 x)\cos(q_2 x) \text{ mit } q_2 > q_1 + 1 > 1.$$
Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))/2$.
Lösung:
$$y_g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((q_2+q_1)x)}{(q_2+q_1)^2 - 1} + \frac{\cos((q_2-q_1)x)}{(q_2-q_1)^2 - 1}\right)$$
Die Abbildung zeigt g (strichliert) und y_g (durchgezogen) für den Fall $q_1 = 9$ und $q_2 = 11$. Liegt im Fall der Figur Resonanz vor? Warum überträgt sich die hochfrequente Oszillation der Inhomogenität g nicht „laut und deutlich" auf die Lösung y_g?



2. I sei ein offenes, reelles Intervall. Die Funktionen $p : I \to \mathbb{R}$ und $q : I \to \mathbb{R}$ seien stetig und $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ seien Lösungen von
$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$
Die Wronskideterminante $W : I \to \mathbb{R}$ von y_1 und y_2 ist definiert durch
$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie zunächst $W' = -pW$. Dann beweisen Sie: Aus $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$ folgt, dass $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.
   (b) Sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von (1), für das $y_1(x_0) \neq 0, y_2(x_0) = 0$ und $W(x_0) = 1$ gilt. Dann existiert eine Umgebung $J \subset I$ von x_0 mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Leiten Sie aus
$$W(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)$$

die folgende Integraldarstellung von $y_2(x)$

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1(\xi)^2} \exp\left(- \int_{x_0}^{\xi} p(t)dt \right) d\xi$$

für $x \in J$ ab.

(c) Formulieren Sie Gleichung (1) als (nichtautonomes) lineares System erster Ordnung $v' = A(x)v$ auf $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$; geben Sie also die Abbildung $A : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann heißt Gleichung (2) parameterbereinigte gedämpfte Schwingungsgleichung

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie mittels Exponentialansatzes ein Fundamentalsystem von (2). Unterscheiden Sie dabei die 3 Fälle $0 \leq \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des gefundenen Lösungspaares mit der Wronskideterminante.

(b) Benützen Sie das Verfahren von Beispiel 2), um für $\alpha = 1$ aus der Lösung $y_1(x) = \exp(-x)$ eine zweite linear unabhängige Lösung zu erhalten.