6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 26. April 2004 / GG

Gewöhnliche Differentialgleichungen:
1. Ordnung, inhomogen linear, Variation der Konstanten

1. Lösen Sie Bsp. 2b) von Blatt 5 mit der Variation der Konstantenformel.

2. An den Enden eines Drahtes mit dem Widerstand $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

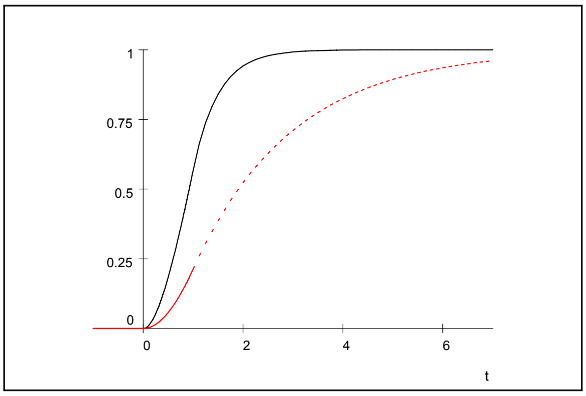
Berechnen Sie die maximale Lösung von (1) zur Anfangsbedingung $I(0) = 0$ für die Inhomogenität $U = U_e$ (stetiger Einschaltvorgang), wobei

$$U_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T}t & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_0 & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

mit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \leq t < T$ und $T \leq t$ inhomogen linear an. Bestimmen Sie die gesuchte Lösung zum Vergleich auch mit der Variation der Konstantenformel. Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0\frac{\tau}{T}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \leq t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (durchgezogen) bzw. $\tau = 2$ (strichliert). Der Stom im Schaltkreis mit der höheren Induktivität baut sich langsamer auf.



3. Die radiale Komponentenfunktion $r \mapsto E_r$ eines kugelsymmetrischen, statischen elektrischen Feldes ist eine Lösung der Diffgleichung $y' = f(x,y)$ mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto -\frac{2y}{x} + g(x).$$

Hier ist $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. ($g = \rho/4\pi\varepsilon_0$ für die Ladungsdichte ρ.) Die Diffgl ist also inhomogen linear.

   (a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ gilt:

$$L = \left\{ \alpha_C : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}\left(C + \int_0^x \xi^2 g(\xi)d\xi\right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

(b) Seien $g_0 \in \mathbb{R}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie die Funktion $\alpha_0 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi$ für die (unstetige!) Ladungsdichte $4\pi\varepsilon_0 g$ einer homogen geladenen Kugel vom Radius R mit

$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{für } 0 < x < R \\ 0 & \text{für } R \leq x \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Graphen von α_0. Wo ist der Betrag von α_0 maximal? Zeigen Sie, dass α_0 auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig ist, und dass für $x \neq R$

$$\alpha_0'(x) = -\frac{2\alpha_0(x)}{x} + g(x)$$

gilt. *Bemerkung*: Das Schwerkraftfeld, mit dem die Erde an einer (kleinen, zusätzlichen) Masse m zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch α_0 gegeben. Die Funktion α_0 gibt also auch über die Schwerkraft im Erdinneren, etwa in einem Bergwerk, Aufschluss.