

Gew Diffglen 1. Ordnung mit getrennten Variablen & lokaler Lipschitzbeschränkung

1. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zur Zeit t , das sich über ein Loch im waagrechten Boden entleert, gilt mit $\alpha > 0$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}.$$

- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\alpha\sqrt{y} \quad \text{für } \alpha > 0.$$

- (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?
2. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im homogenen Schwerfeld (Beschleunigungskonstante $g > 0$) gilt bei linearer Reibung, (Reibungskoeffizient $\gamma > 0$)

$$\frac{d}{dt}v(t) = -g - \gamma v(t).$$

Der Definitionsbereich der Diffgl sei maximal.

- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = v_0 > 0$. Hat $v(t)$ Grenzwerte für $t \rightarrow \pm\infty$?
3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$.
- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.
- (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizzieren Sie!)
- (c) Zeigen Sie (ohne Verwendung von L), dass für Lösungen y der Differentialgleichung gilt: $(x^2 + y^2)' = 0$.
- (d) Sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$. Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.
4. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat das in Fig. 1 abgebildete Richtungsfeld. (Darüber nachdenken!)

- (a) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Fig. 2 zeigt einige Lösungen.)
- (b) Zeigen Sie, ohne Ihre nähere Kenntnis von den Lösungen zu benutzen, also nur unter Verwendung der Differentialgleichung selbst, dass für Lösungen y der Differentialgleichung gilt: $\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.

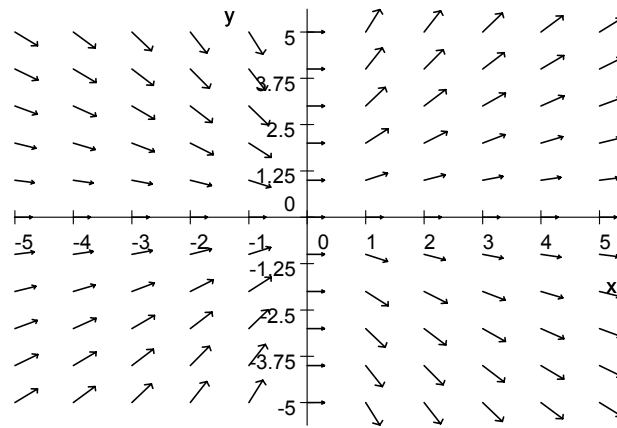


Fig. 1: Das Richtungsfeld zu Bsp. 4

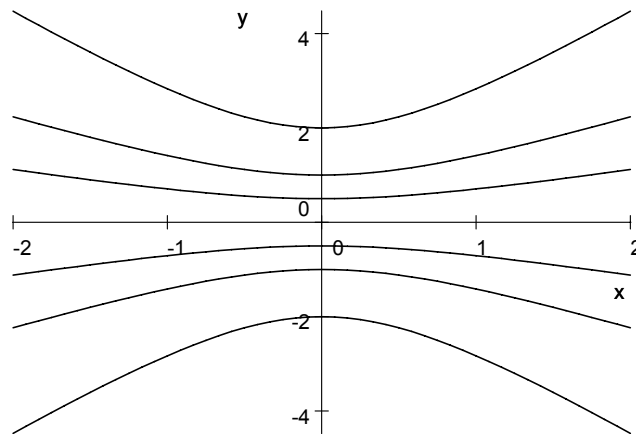


Fig. 2: Einige Lösungen zu Bsp. 4