4. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 29. März 2004 / GG

Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf $\mathbb{R}^n$

1. Die *Exponentialverteilung* ist ein W-maß W auf $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$. Sie hat die Dichte $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ mit $\lambda > 0$.

   (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto W((0,x])$ von W. Kontrollieren Sie, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Skizzieren Sie die Graphen von F und F'.

   (b) Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der stochastischen Variablen $X_n := (id_\Omega)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.

   (c) Welche Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F'_f hat der Transport W_f von W unter der stochastischen Variablen $f := \sqrt{X_1} : \Omega \to \mathbb{R}$? Lösung:

   $$F_f(\xi) := W_f((-\infty,\xi]) = W\left(\left\{x \in \Omega \mid \sqrt{x} \le \xi\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \le 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda\xi^2\right) & \text{für } \xi > 0 \end{cases}.$$

   Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F'_f.

2. Wird ein Körper im homogenen Schwerefeld der Erde (vertikal) nach oben geworfen, so erreicht er bei einer Startgeschwindigkeit v (unter Vernachlässigung der Luftreibung) die Steighöhe $h(v) = \frac{v^2}{2g}$. Sei nun die Startgeschwindigkeit eines solchen Körpers im Intervall $0 \le v \le v_{\max}$ *gleichverteilt*. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0{,}298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0{,}9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}05$ gegeben ist. Wie groß ist der prozentuelle Beitrag des Ereignisses $\{v \in [0, v_{\max}] \mid h(v) > 0{,}9 \cdot h_{\max}\}$ zu $\langle h \rangle$?

3. Das W-maß W auf $\mathbb{R}^3$, sei für ein $R > 0$ in der Kugel $K_R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\right\}$ *gleichverteilt*.

   (a) Welche Verteilungsfunktion $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F'_r hat der Transport W_r von W unter der stochastischen Variablen

   $$r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

   Lösung:

   $$F_r(\xi) := W\left(r^{-1}((-\infty,\xi])\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \le 0 \\ \left(\frac{\xi}{R}\right)^3 & \text{für } 0 < \xi < R \\ 1 & \text{für } \xi \ge R \end{cases}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass

   $$\langle r \rangle_W := \int_0^\infty F'_r(\xi)\,\xi d\xi = \frac{3}{4}R, \quad V_W(r) = \frac{3R^2}{80}$$

   (c) Welche Verteilungsfunktion F_{π_1} hat der Transport von W unter $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x$?

4. Der Abstand r zwischen Kern und Elektron eines H-Atoms ist eine (nichtnegative) reelle stochastische Variable auf $\mathbb{R}^3$. Sie hat im Grundzustand die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

   $$F(x) := \int_0^x \rho(\xi)d\xi, \qquad \rho(x) := Nx^2\exp(-x).$$

   (Hier ist der halbe Bohrsche Radius als Längeneinheit gewählt.) $N \in \mathbb{R}$

   (a) $N =$? Hinweis: $lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

   (b) Skizzieren Sie die Graphen von F und ρ.

   (c) $\langle r \rangle =?, V(r) =?$