3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 22. März 2004 / GG

Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit, Geometrische Verteilung, Poissonverteilung

1. Ein Zufallsexperiment hat die zwei möglichen Ausgänge A und B. Die Wahrscheinlichkeit des Ausganges B sei x. Wird das Experiment N mal wiederholt, dann bezeichnet N_B die Anzahl der Experimente mit Ausgang B. Die Chebyshevungleichung zu N_B gibt eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die *Häufigkeit* des Ausgangs B, nämlich N_B/N, von x um mehr als εx abweicht. ($\varepsilon > 0$) Berechnen Sie diese Schranke für $N = 10^{22}, x = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$. Hinweis: Ersetzen Sie A und B durch die Zahlen 0 und 1. Wählen Sie dann zu N_B eine stochastische Variable.

2. Ein instabiler Atomkern, der unabhängig von seinem Alter in einer Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1-x) \in \,]0,1[$ zerfällt, überlebt $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden und zerfällt dann bis zum Zeitpunkt $n+1$ mit der Wahrscheinlichkeit $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$. (Geometrische Verteilung zum Parameter x)

   (a) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern vor der Zeit $N+1$? Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$?

   (b) Die stochastische Variable $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$ heißt Lebensdauer. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat τ? Hinweis:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (c) Skizzieren Sie den Graphen der Verteilung p (von τ).

   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern, der den Zeitpunkt M erlebt, bis zum Zeitpunkt $M+m$? Hinweis: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A\cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq M\}$ ist zu ermitteln. Sind A und B stochastisch unabhängig? Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern im Intervall $M \leq n < M+m$?

3. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit
   $$p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto W(\{n\}) = \frac{\delta^n \exp(-\delta)}{n!}.$$
   Rechnen Sie nach:

   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2\cdot\mathbb{N}_0) = e^{-\delta}\cosh(\delta) > 1/2, W(2\cdot\mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta}\sinh(\delta)$.[1]

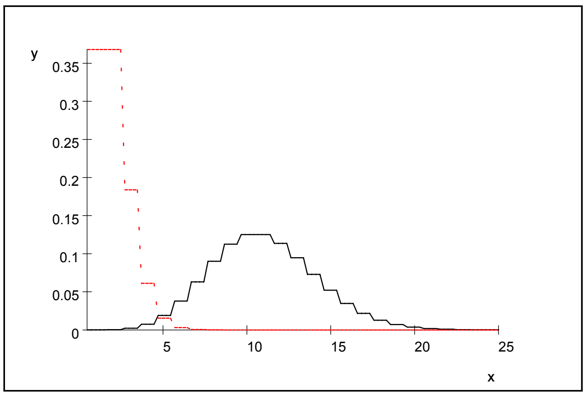
   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0}\rangle = \delta$.

   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$gilt $\langle f\rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0}\rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt den Graphen von p_δ für $\delta = 10$ (durchgezogen) und für $\delta = 1$.



[1] $2\cdot\mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$