14. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 29. Juni 2004 / PG & GG
2. Klausur

---

1. (6 Punkte) Auf $\mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung $y''(x) - y(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ gegeben.

   (a) (1 Punkt) Geben Sie den Typ dieser Differentialgleichung an.

   (b) (1 Punkt) Finden Sie durch Ansatz *alle* maximalen Lösungen der homogenen Gleichung.

   (c) (2 Punkte) Finden Sie durch Ansatz *eine* maximale Lösung der inhomogenen Gleichung. (Kontrolle durch Einsetzen!) Hinweis: $2\sin^2(\frac{x}{2}) = 1 - \cos(x)$.

   (d) (2 Punkte) Berechnen Sie die maximale Lösung der inhomogenen Gleichung zur Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$.

2. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = x^2$ für $-\pi \leq x < \pi$. Zeigen Sie, dass f die folgende Sinus/Cosinus Reihe hat.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}$$

3. (6 Punkte) Sei $e \in \mathbb{R}^3$ mit $\|e\|^2 = \langle e, e\rangle = 1$. Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt. Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\langle e, x\rangle}{\|x\|^3}.$$

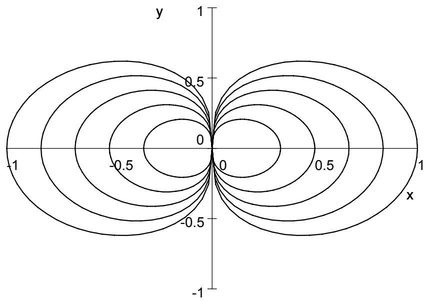
   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie

$$\operatorname{grad}_x(f) = \frac{1}{\|x\|^3}\left(e - 3\frac{\langle e, x\rangle}{\|x\|^2}x\right).$$

   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie für das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto x/\|x\|$, dass

$$E_x[f] = -\frac{2}{\|x\|}f(x).$$

(c) Das Bild zeigt Schnitte einiger Niveauflächen von f mit einer Ebene durch 0, die e enthält. Der Vektor e ist im Bild durch $(1,0)$ dargestellt. f ist bis auf einen konstanten Faktor das Potential eines elektrischen Dipols. f ist invariant unter Drehungen um e.



Skizzieren Sie (ohne Rechnung!) im Bild der Niveaulinien 2 Integralkurven von grad (f).