

Fourierintegrale

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$(Ff)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

der folgenden auf \mathbb{R} definierten Funktionen. Geben Sie auch die Funktionen a, b der sin / cos-Version

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)] dk$$

der Umkehrformel an.

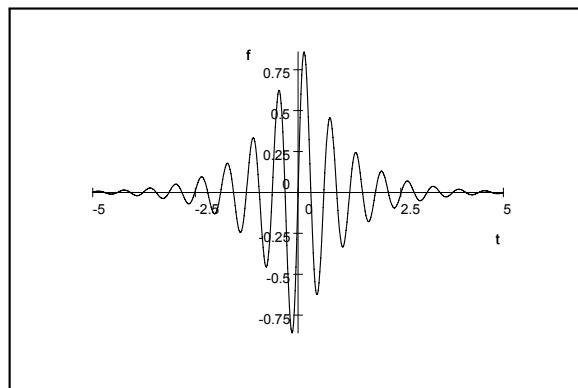
(a) $f(x) = 1$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst.

(b) $g(x) = f\left(\frac{x-\xi}{L}\right)$ mit f wie in a), wobei $\xi, L \in \mathbb{R}$ und $L > 0$.

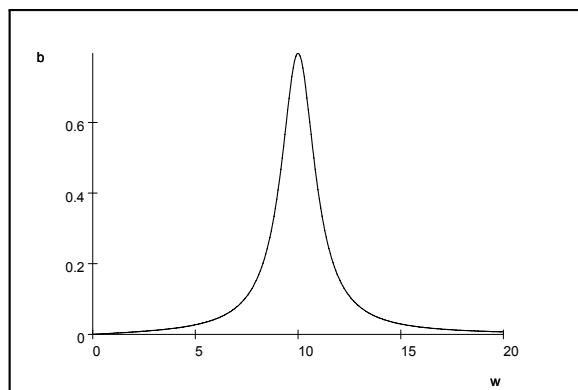
(c) $f(x) = x$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Überprüfen Sie unter Verwendung von Beispiel 1a) den Teil 4) des Fouriertrafosatzes der Vorlesung.

2. Sei $f(t) = \exp(-\lambda |t|) \sin(\Omega t)$ für $\lambda, \Omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie $a = 0$ und

$$b(\omega) = 2i (Ff)(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda \Omega \omega}{\lambda^4 + 2\lambda^2(\omega^2 + \Omega^2) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}.$$



Der Graph von f für $\lambda = 1$ und $\Omega = 10$



Der Graph von b für $\lambda = 1$ und $\Omega = 10$

3. Sei f wie in Bsp.1a)

(a) Überprüfen Sie daran Teil 1) des Fouriertrafosatzes.

(b) Berechnen Sie die Faltung $f * f$ und überprüfen Sie Teil 2) des Fouriertrafosatzes.