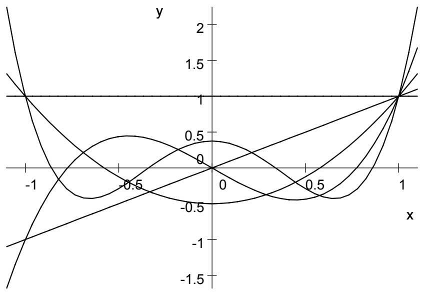
10. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 24. Mai 2004 / GG

Legendrepolynome

1. Schließen Sie aus der Definition der Legendrepolynome $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(x^2 - 1\right)^n\right],$$

dass $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$.



Die Legendrepolynome $P_0, \ldots P_4$

2. Die Legendresche Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ ist

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{1}$$

Im eingeschränkten Bereich $-1 < x < 1$ von (1) ist der allgemeine Lösungssatz für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung anwendbar. Sei α eine Lösung von (1) mit dem Definitionsbereich $(-1, 1)$. Zeigen Sie, dass dann auch die „gespiegelte" Funktion $\Pi\alpha$ eine solche Lösung ist. Die gespiegelte Funktion ist definiert durch $\Pi\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha(-x)$. Zeigen Sie mit dem Eindeutigkeitssatz für die maximalen Lösungen des Anfangswertproblems: Es gibt eine Basis (α_+, α_-) des Raumes der maximalen Lösungen auf $(-1, 1)$ mit $\Pi\alpha_\pm = \pm\alpha_\pm$. Hinweis: Betrachten Sie das Fundamentalsystem zur Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Die Potenzreihe (2) konvergiere für ein $x = r > 0$. Sie konvergiert dann für alle $|x| \leq r_0 < r$ gleichmäßig.

$$\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k x^k \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie: Ist α für alle $x \in [-r_0, r_0]$ Lösung von (1), dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

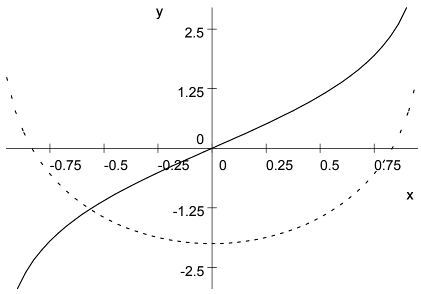
$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k. \tag{3}$$

Die Koeffizienten $c_{k \geq 2}$ sind somit für beliebig gewähltes $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$ eindeutig festgelegt.

(b) Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass eine Potenzreihe (2), für deren Koeffizienten (3) gilt, für alle $|x| < 1$ konvergiert. Die Reihe definiert somit eine Lösung von (1) mit dem Definitionsbereich $(-1, 1)$. Zeigen Sie weiter: Lässt sich eine so konstruierte Potenzreihenlösung α *stetig* nach $[-1, 1]$ fortsetzen, dann folgt: α ist ein Polynom vom Grad n mit $\Pi\alpha = (-1)^n \alpha$. Schließen Sie daraus: Der Raum aller Lösungen von (1) mit Definitionsbereich $[-1, 1]$ ist *eindimensional*. Da die Einschränkung von P_n auf $[-1, 1]$ eine Lösung von (1) ist, stimmt der Raum der maximalen Lösungen von (1) auf $[-1, 1]$ mit $\mathbb{R} \cdot P_n |_{[-1,1]}$ überein.

4. Berechnen Sie für $n = 0$ und $n = 1$ jeweils die Menge aller maximalen Lösungen der auf $(-1, 1)$ eigeschränkten Differentialgleichung (1). Hinweis: Die Lösung P_n kann mit der Methode von Beispiel 2), Blatt 9) auf $(-1, 1)$ zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden. Kontrollieren Sie, dass dieses Fundamentalsystem *nicht* nach $[-1, 1]$ fortgesetzt werden kann. Lösung (Fig. 2):

$$
\begin{aligned}
L_{n=0} &= \left\{\alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + b\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\right\}, \\
L_{n=1} &= \left\{\alpha_{a,b} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b\left[x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\right] \mid a, b \in \mathbb{R}^2\right\}.
\end{aligned}
$$



Die Lösungen $\alpha_{0,1}$ für $n = 0$ und $n = 1$ (strichliert)

5. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ mit $r := |\mathbf{x}|$, und $r_0 := |\mathbf{y}|$. Ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, dann gilt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}.$$

Behauptung[1]: Für $-1 < \lambda < 1$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\,\lambda^n.$$

Kontrollieren Sie diese Behauptung an den ersten 3 Summanden unter Verwendung der Taylorreihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots \text{für } -1 < x \leq 1.$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \quad \text{für } r_0 < r.$$

6. Sei $e_k : (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Polynomfolge $B_n := (e_k)_{k \leq n}$ ist eine geordnete Basis des Vektorraums V_n aller Polynome auf $(-1, 1)$ vom Grad kleiner gleich n. Auf V_n ist durch

$$\langle f, g\rangle_n := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Wenden Sie auf die Basis B_3 das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren zum Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ an. Kontrollieren Sie, dass dies eine Basis von V_3 des Typs $(\lambda_k P_k)_{0 \leq k \leq 3}$ mit $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ergibt.

[1] Der Beweis folgt in der Vorlesung Mathematische Methoden der Physik II.