

Endliche Wahrscheinlichkeitsräume, stochastische Variable

1. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert. Ein Elementarereignis dieses Spiels ist somit ein Paar (i, j) von Augenzahlen $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.

- (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Würfelspiels die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\omega) := W(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ an.
- (b) Die Teilmenge $A \subset \Omega$ steht für das Ereignis „Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim“? Welche Wahrscheinlichkeit hat A ?
- (c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade“?
- (d) $B \subset \Omega$ steht für: „Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11“. Sind A und B stochastisch unabhängig, dh: gilt $W(A \cap B) = W(A)W(B)$?
- (e) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von f :

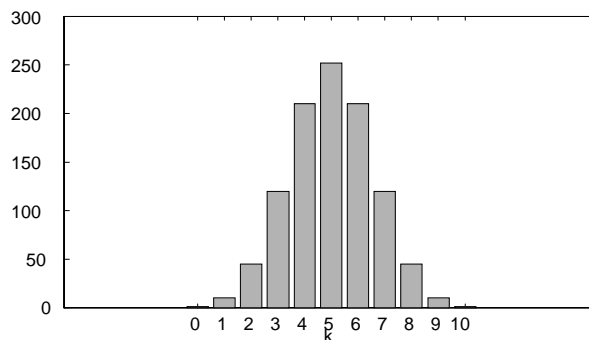
$$\langle f \rangle_W = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) f(\omega), \quad \mathcal{V}(f) = \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2.$$

(f) Geben Sie für den Transport¹ W_f von W mit f die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_f auf $f(\Omega)$ an. Berechnen Sie also für jedes $x \in f(\Omega)$ die Zahl $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$. Zeigen Sie $\langle f \rangle_W = \sum_{x \in f(\Omega)} x p_f(x)$.

- 2. Beantworten Sie die Frage 1a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Liegt wie in 1a) eine Gleichverteilung vor?
- 3. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum hat *Lotto Sechs aus 45*? Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Elementarereignis? Hinweis: Eine Ziehung ist eine injektive² Abbildung $f : \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Sind f und g zwei solche Abbildungen mit $g(\{1, 2, \dots, 6\}) = f(\{1, 2, \dots, 6\})$, dann werden sie als dasselbe Ereignis aufgefasst, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ignoriert wird. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, \dots, 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \leq N$ heißen die Zahlen

$$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Binomialkoeffizienten³. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)\dots 1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.



¹Es gilt für jedes $A \subset f(\Omega)$ dass $W_f(A) = W(f^{-1}(A))$, wobei $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$.

²Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

³Es gilt

$$(x + y)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k}$$