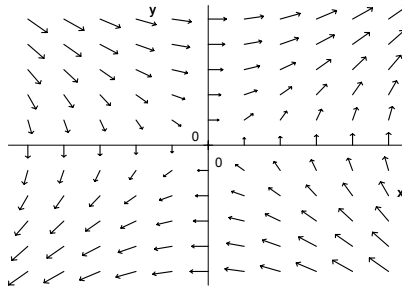


Lineare Systeme erster Ordnung

1. Für die Abbildung $X : \mathbb{R}^{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ gelte

$$X : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Der Graph der Abbildung X , das ist die Menge $\Gamma(X) := \{(v, X(v)) \mid v \in \mathbb{R}^{2 \times 1}\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 1} \times \mathbb{R}^{2 \times 1}$, wird als das Vektorfeld (zu) X bezeichnet.



Das Vektorfeld zu X

(a) Zeigen Sie, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen des Systems $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ gilt

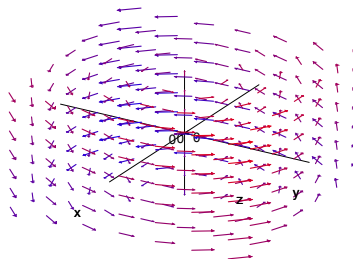
$$L = \left\{ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \right\}.$$

(b) Skizzieren Sie die Trajektorien durch die Punkte $(1, 0)^t$, $(0, 1)^t$ und $(1, 1)^t$. Die Trajektorie durch $(1, 0)^t$ ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die anderen Trajektorien sind analog zu bilden. Ist $(0, 0)^t$ in der Trajektorie durch $(1, 1)^t$ enthalten?

2. (Dreidimensionale Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) Sei V ein dreidimensionaler, orientierter reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein festes $n \in V$ ist die Abbildung $L_n : V \rightarrow V, v \mapsto n \times v$ linear. Hier $n \times v$ bezeichnet das Vektorprodukt von n mit v . Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.



Das Drehvektorfeld L_{e_3}

(a) Es sei die Kurve $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow V$ durch

$$\gamma_v(t) = n \langle n, v \rangle + \cos(\omega t) (v - n \langle n, v \rangle) + \sin(\omega t) n \times v$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Systems $\dot{v} = \omega L_n(v)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welchen Orbit hat γ_v ? Geben Sie die (maximale) Flussabbildung Φ des Vektorfeldes ωL_n an. Hinweis: $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$.

(b) Kontrollieren Sie $\gamma_v(t) = \exp(t\omega L_n)(v)$.

(c) Zeigen Sie für die Beschleunigung $b_v(t) = \frac{d^2\gamma_v}{dt^2}(t)$ der Integralkurve

$$b_v(t) = -\omega^2 (\gamma_v(t) - n \langle n, \gamma_v(t) \rangle).$$

3. (Quantenmechanik eines Spin-1/2-Systems) Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für zwei Vektoren e_1 und e_2 gelte $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Für die lineare Abbildung $\sigma : V \rightarrow V$ gelte $\sigma(e_1) = e_2$ und $\sigma(e_2) = e_1$.

(a) Zeigen Sie¹

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (t, v) \mapsto \exp(-it\sigma)v = \cos(t)v - i \sin(t)\sigma(v).$$

Hinweis: $\sigma^{2n} = id$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Kontrollieren Sie $\langle \Phi(t, v), \Phi(t, w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. (Unitarität)

(c) Zeigen Sie $|\langle \Phi(t, e_1), e_1 \rangle|^2 = \cos^2(t)$.

¹ Φ ist also der maximale Fluss des Systems $i\dot{\gamma} = \sigma\gamma$.