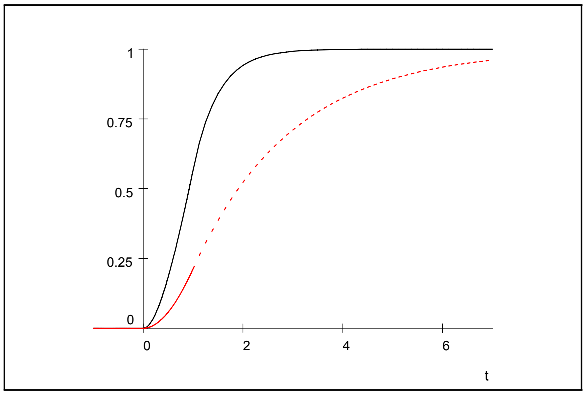
Variation der Konstanten

1. Zwischen den Enden eines Drahtes mit dem Widerstand $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$ an. Die Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung
$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = U(t). \qquad (1)$$

   (a) Berechnen Sie die maximale Lösung von (1) zur Anfangsbedingung $I(0) = 0$ für die Inhomogenität $U = U_e$ (stetiger Einschaltvorgang), wobei
$$U_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T}t & \text{für } 0 \le t < T \\ U_0 & \text{für } T \le t \end{cases}$$
   mit $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \le t < T$ und $T \le t$ inhomogen linear an. Bestimmen Sie die gesuchte Lösung zum Vergleich auch mit der Variation der Konstantenformel. Lösung:
$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0 \frac{\tau}{T}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{t}{\tau} - 1\right) & \text{für } 0 \le t < T \\ I_0\left(1 - \frac{\tau}{T}\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) & \text{für } T \le t \end{cases}$$
   mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (durchgezogen) bzw. $\tau = 2$ (strichliert). Der Stom im Schaltkreis mit der höheren Induktivität baut sich langsamer auf.



   (b) Sei $c > 0$ und $U_{e,c}(t) := U_e(t - c)$. Geben Sie die maximale Lösung von (1) im Fall der Inhomogenität $U_{e,c}$ und der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ an.

   (c) Gegen welche Funktion konvergiert die Lösung von a) für $T \to 0$?

   (d) Berechnen Sie die maximale Lösung von (1) mit der Inhomogenität $U = U_0 - U_e$ zur Anfangsbedingung $I(0) = U_0/R$ (stetiger Ausschaltvorgang). Achtung: Die Lösung kann aus jener von a) ganz einfach gewonnen werden.

2. Die Differentialgleichung (1) kann auch für unstetige Inhomogenität U formuliert werden. Dazu ein Beispiel: Sei
$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$
   mit $U_0 \in \mathbb{R}$ ("Rechteckpuls"). Die Funktion U ist auf den drei Intervallen $D_1 = (-\infty, 0)\,, D_2 = (0, T)$ und $D_3 = (T, \infty)$ stetig. Damit sind drei Differentialgleichungen $y' = a_i(x)y + b_i(x) = f_i(x, y)$ im Sinn der Vorlesung auf offenen Definitionsbereichen D_i gegeben.

[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

(a) Berechnen Sie jene drei Lösungen α_i von $y' = f_i(x, y)$, die Einschränkungen einer (einzigen!) stetigen Funktion α auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$ sind. Geben Sie α an.

(b) Wo ist α diffbar? Skizzieren Sie den Graphen der Abbildung $x \mapsto \alpha'(x)$. ($L\dot{I}$ gibt im Fall der Serienschaltung einer Spule und eines Ohmschen Widerstandes die Spannung zwischen den Enden der Spule an.)