6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 28. April 2003 / GG

Die Lösungsmenge von $y' = y^2 - 1$, Variation der Konstantenformel

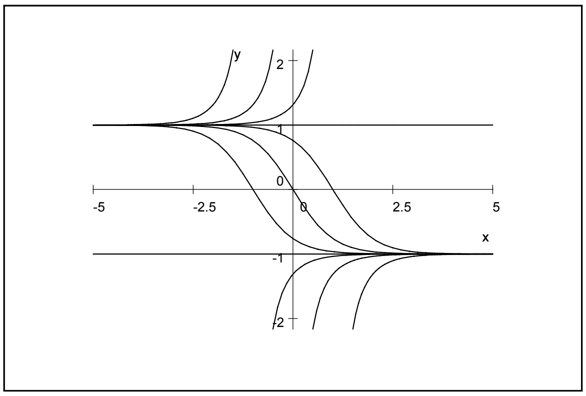
1. Sei $\Delta := \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ und $\alpha : \Delta \to \mathbb{R}$ und $\beta : \Delta \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) = \left(x^2-1\right)^{-1}$ und $\beta(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. Skizzieren Sie den Graphen von α und zeigen Sie, dass $\beta' = \alpha$.

2. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ und $\coth : \mathbb{R}\setminus 0 \to \mathbb{R}\setminus[-1,1]$ mit $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ und $\coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$ bijektiv sind. Skizzieren Sie die Graphen von tanh, coth und der Umkehrfunktionen $\tanh^{-1}$ und $\coth^{-1}$.

3. Zeigen Sie $\tanh^{-1}(x) = -\beta(x)$ für $-1 < x < 1$ und $\coth^{-1}(x) = -\beta(x)$ für $|x| > 1$.Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $\tanh(-\beta(x)) = x$ für $-1 < x < 1$ und dass $\coth(-\beta(x)) = x$ für $|x| > 1$.

4. Zeigen Sie mithilfe des Eindeutigkeitssatzes aus der Vorlesung, dass die Menge L aller maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y^2 - 1$ aus genau den folgenden Funktionen besteht:

   - $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1,$
   - $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1,$
   - $y : \mathbb{R} \to (-1,1), \quad x \mapsto \tanh(c-x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig,
   - $y : (-\infty, c) \to (1,\infty), \quad x \mapsto \coth(c-x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig,
   - $y : (c,\infty) \to (-\infty,-1) \quad x \mapsto \coth(c-x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.



5. Zeigen Sie, dass die Abbildungen (Spiegelung und Translationen)[1]

$$\begin{aligned} \Pi &: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad (\Pi y)(x) := -y(-x) \text{ für alle } -x \in D_y, \\ T_\tau &: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad (T_\tau y)(x) := y(x-\tau), \text{ für alle } x-\tau \in D_y \text{ und } \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   die Lösungsmenge L aus Beispiel 4) auf sich abbilden. Man sagt: Π und T_τ sind Symmetrien von $y' = y^2 - 1$. Diese Symmetrien ermöglichen es, sich bei der Lösung des Anfangswertproblems auf Anfangswerte (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und $y_0 \geq 0$ zu beschränken. Warum?

6. Die radiale Komponentenfunktion $r \mapsto E_r$ eines kugelsymmetrischen, statischen elektrischen Feldes ist eine Lösung der Diffgleichung $y' = f(x,y)$ mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto -\frac{2y}{x} + g(x).$$

   Hier ist $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. ($g = \rho/4\pi\varepsilon_0$ für die Ladungsdichte ρ.) Die Diffgl ist also inhomogen linear.

[1] $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ist die Menge aller auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen. Für $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ bezeichnet $D_y \subset \mathbb{R}$ den Definitionsbereich von y.

(a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ gilt:

$$L = \left\{ \alpha_C : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \left(C + \int\limits_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Seien $g_0 \in \mathbb{R}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie die Funktion $\alpha_0 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi$ für die (unstetige!) Ladungsdichte, für die

$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{für } 0 < x < R \\ 0 & \text{für } R \leq x \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Graphen von α_0. Wo ist der Betrag von α_0 maximal? Zeigen Sie, dass α_0 auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetig ist, und dass für $x \neq R$

$$\alpha_0'(x) = -\frac{2\alpha_0(x)}{x} + g(x)$$

gilt.