

Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf  $\mathbb{R}^n$

1. Die *Exponentialverteilung* ist ein W-maß  $W$  auf  $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$ . Sie hat die Dichte  $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$  mit  $\lambda > 0$ .

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto W((0, x])$  von  $W$ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Skizzieren Sie die Graphen von  $F$  und  $F'$ .

- (b) Zeigen Sie durch Induktion nach  $n$  für den Erwartungswert der stochastischen Variablen  $X_n := (id_\Omega)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass  $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$ .
- (c) Welche Verteilungsfunktion  $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Dichte  $F'_f$  hat der Transport  $W_f$  von  $W$  unter der stochastischen Variablen  $f := \sqrt{X_1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ? Lösung:

$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W(\{x \in \Omega \mid \sqrt{x} \leq \xi\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda \xi^2) & \text{für } \xi > 0 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie die Graphen von  $F_f$  und  $F'_f$ .

- (d) Sei  $L > 0$ , das Ereignis  $B = (L, \infty)$  und  $W_B$  das konditionelle W-maß zu  $B$ . Welche Verteilungsfunktion  $F_{g,B}$  und Dichte  $F'_{g,B}$  hat die stochastische Variable  $g := (X_1 - L)|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$  unter  $W_B$ ? Hinweis:

$$F_{g,B}(\xi) := (W_B)_g((-\infty, \xi]) = \frac{W(g^{-1}((-\infty, \xi]) \cap B)}{W(B)}$$

- (e) Welche bedingte Wahrscheinlichkeit  $W(A \mid B)$  hat das Ereignis  $A = (0, L_1)$  bezüglich  $B = (0, L_2)$ ? Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig?

2. Das W-maß  $W$  auf  $\mathbb{R}^3$ , sei für ein  $R > 0$  in der Kugel  $K_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$  gleichverteilt.

- (a) Welche Verteilungsfunktion  $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und Dichte  $F'_r$  hat der Transport  $W_r$  von  $W$  unter der stochastischen Variablen

$$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lösung:

$$F_r(\xi) := W(r^{-1}((-\infty, \xi])) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ \left(\frac{\xi}{R}\right)^3 & \text{für } 0 < \xi < R \\ 1 & \text{für } \xi \geq R \end{cases}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\langle r \rangle_W := \int_0^\infty F'_r(\xi) \xi d\xi = \frac{3}{4}R, \quad V_W(r) = \frac{3R^2}{80}$$

- (c) Welche Verteilungsfunktion  $F_{\pi_1}$  hat der Transport von  $W$  unter  $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x$ ?

3. Der Abstand  $r$  zwischen Kern und Elektron eines H-Atoms ist eine (nichtnegative) reelle stochastische Variable auf  $\mathbb{R}^3$ . Sie hat im Grundzustand die Verteilungsfunktion  $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(x) := \int_0^x \rho(\xi) d\xi, \quad \rho(x) := N x^2 \exp(-x).$$

(Hier ist der halbe Bohrsche Radius als Längeneinheit gewählt.)  $N \in \mathbb{R}$

- (a)  $N = ?$  Hinweis:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
- (b) Skizzieren Sie die Graphen von  $F$  und  $\rho$ .
- (c)  $\langle r \rangle = ?$ ,  $V(r) = ?$