3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 24. März 2003 / GG

Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit, Poissonverteilung

1. Ein Zufallsexperiment hat die zwei möglichen Ausgänge A und B. Die Wahrscheinlichkeit des Ausganges B sei x. Wird das Experiment N mal wiederholt, dann bezeichnet N_B die Anzahl der Experimente mit Ausgang B. Die Chebyshevungleichung zu N_B gibt eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die *Häufigkeit* des Ausgangs B, nämlich N_B/N, von x um mehr als εx abweicht. ($\varepsilon > 0$) Berechnen Sie diese Schranke für $N = 10^{22}, x = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$.

2. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit

$$p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto W(\{n\}) = \frac{\delta^n \exp(-\delta)}{n!}.$$

Rechnen Sie nach:

(a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2 \cdot \mathbb{N}_0) = e^{-\delta}\cosh(\delta) > 1/2, W(2 \cdot \mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta}\sinh(\delta)$.[1]

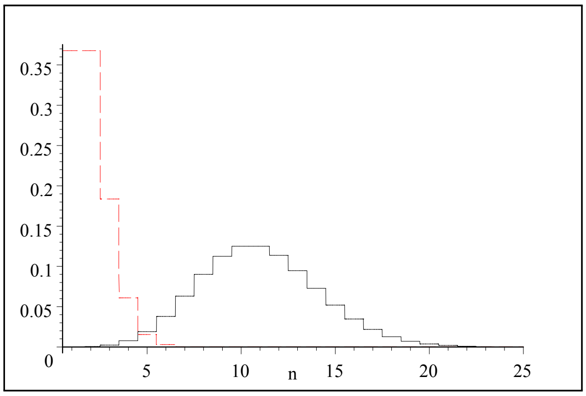
(b) $\langle id_{\mathbb{N}_0} \rangle = \delta$.

(c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

(d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$gilt $\langle f \rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

(e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0} \rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

Die Abbildung zeigt den Graphen von p_δ für $\delta = 10$ (durchgezogen) und für $\delta = 1$.



[1] $2 \cdot \mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$