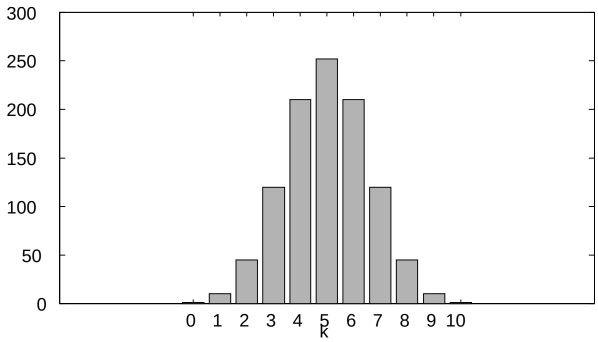
2. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 17. März 2003 / GG

Kombinatorik (Lotto), Geometrische Verteilung

1. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum hat *Lotto Sechs aus 45*? Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Elementarereignis? Hinweis: Eine Ziehung ist eine injektive[1] Abbildung $f : \{1, 2, ..6\} \to \{1, 2, .., 45\}$. Wieviele solche Abbildungen gibt es? Sind f und g zwei solche Abbildungen mit $g(\{1, 2, ..6\}) = f(\{1, 2, ..6\})$, dann werden sie als dasselbe Zufallsereignis aufgefasst, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ignoriert wird. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, .., 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \le N$ heißen die Zahlen

$$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

Binomialkoeffizienten[2]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)..1$ und $0! := 1$. Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für $N = 10$.



2. Ein instabiler Atomkern wird ab einem Startzeitpunkt in gleichen Zeitabständen auf sein Intaktsein abgefragt. Zerfällt er zwischen Zeitpunkt n und $n+1$, so hat das Zufallsexperiment den Ausgang $n \in \mathbb{N}_0$, wir sagen der Kern zerfällt im Intervall n. Dieses Elementarereignis habe die Wahrscheinlichkeit $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$ für ein festes x mit $0 < x < 1$. (Geometrische Verteilung zum Parameter x)

   (a) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern in irgendeinem Intervall $n < N$? Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$?

   (b) Die stochastische Variable $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$ heißt Lebensdauer. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat τ? Hinweis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (c) Skizzieren Sie den Graphen der Verteilung p (von τ).

   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern, der in einem Intervall $n \ge M$ zerfällt, in irgendeinem Intervall mit $n < M + m$? Hinweis: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M + m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \ge M\}$ ist zu ermitteln.

   (e) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern in irgendeinem Intervall n mit $M \le n < M + m$? Sind A und B stochastisch unabhängig? Hinweis: $W(A \cap B) =?$

[1] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

[2] Es gilt

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} x^k y^{N-k}$$

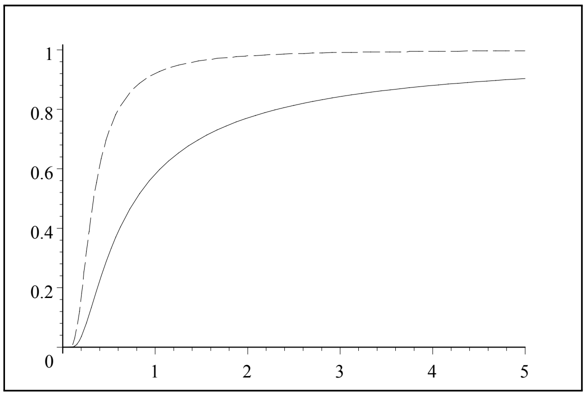
3. Für Unausgelastete eine Brücke von Bsp. 2) hin zur Physik mit einer kleinen Fingerübung in Sachen Limesberechnung und Kettenregel. Das Beispiel zählt nicht zum PS-Stoff, Sie sollten es aber benützen, um Ihr Wissen aus MfP zu festigen.
Im thermischen Gleichgewichtszustand eines elektromagnetischen Hohlraumresonators mit einer Schwingungsmode der Frequenz ν ist die Zahl n der Photonen in dieser Mode geometrisch verteilt mit Parameter $x = \exp(-\frac{h\nu}{kT})$. ($T$...Temperatur, h...Plancksche Konstante, k...Boltzmannkonstante) Kontrollieren Sie, dass sich die Funktion $T \mapsto \langle n \rangle$ für $T \to \infty$ an eine lineare Funktion annähert. Zeigen Sie auch, dass diese Funktion für $T \to 0$ stärker als T gegen 0 geht. Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \Theta := \frac{kT}{h\nu} \mapsto \langle n \rangle / \Theta = \frac{1}{\Theta \exp(1/\Theta) - \Theta}$$

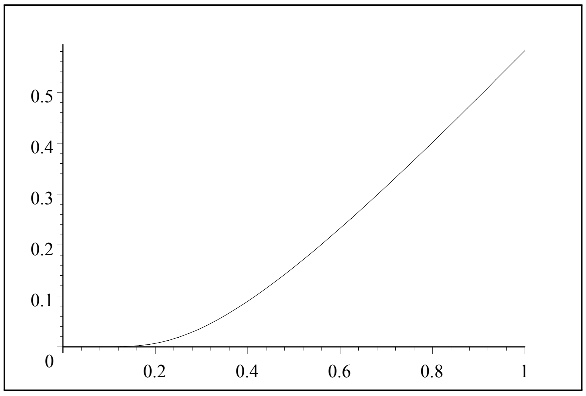
für $\Theta \to \infty$ gegen 1 und für $\Theta \to 0$ gegen 0 konvergiert[3]. Die Größe Θ ist eine dimensionslose, problemangepasste Temperaturvariable. Zeigen Sie weiter, dass für die Ableitung G' der Funktion $G(\Theta) := \Theta F(\Theta) = \langle n \rangle$ gilt

$$G'(\Theta) = \left(2\Theta \sinh\left(\frac{1}{2\Theta}\right)\right)^{-2}.$$

G' ist der Beitrag der betrachteten Mode zur spezifischen Wärme des Hohlraumresonators. Berechnen Sie die Limiten von $G'(\Theta)$ für $\Theta \to 0$ und $\Theta \to \infty$.



Die Graphen von F (durchgezogen) und von G' (strichliert)



Der Graph von $\Theta \mapsto \frac{1}{\exp(1/\Theta)-1}$

[3] Es gilt sogar für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{\Theta \to 0} \langle n \rangle / \Theta^m = 0$.