14. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 30. Juni 2003 / GG

Richtungsableitung, Grad, Rot, Div, Δ; Linienintegral

1. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie $grad(f)$ und $div\,(grad\,(f))$ der folgenden Funktionen vom Typ $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.[1]

   (a) Sei $k_i \in V$ für $i = 1, ..., m$ und $f(p) := \sum_{i=1}^{m} \langle k_i, p\rangle^2$ für alle $p \in V$.

   (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V\backslash 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.

   (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(p) = \frac{1}{r(p)} \langle e, p\rangle$ für alle $p \in U = V\backslash 0$. [2]

2. Sei $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \Rightarrow x < 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Für $\phi : U \to (0, 2\pi)$ gelte

$$id_U = r \cdot (\cos\phi, \sin\phi)$$

   auf U, wobei $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$. Für $grad\,(\phi)$ (bezüglich des Standardskalarproduktes) folgt für alle $p \in U$ (siehe VO) $grad_p\,(\phi) = X(p)$ mit $X : \mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y, x)$. Figur 2 zeigt das Drehvektorfeld $(-y, x)$. Achtung: Der Definitionsbereich von X ist größer als jener von $grad(\phi)$.

   (a) Berechnen Sie die Abbildung $X\,[f] : p \mapsto \langle grad_p\,(f)\,, X(p)\rangle = X_p\,[f]$ für alle $p \in \mathbb{R}^2\backslash 0$ zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$. Richtungsableitung von f bei p mit $X(p)$.

   (b) Zeigen Sie $div(X) = 0$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$.

   (c) Berechnen Sie das Linienintegral von X längs eines Kreises um 0 mit Radius $R > 0$. Gibt es eine diffbare Funktion F, sodass $grad\,(F) = X$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$?

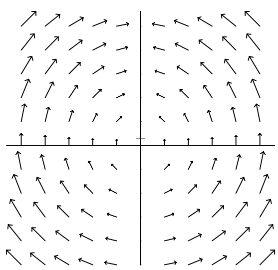

Fig.1

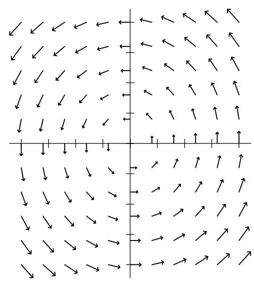

Fig.2

3. Für $e \in V = \mathbb{R}^3$ gelte $\|e\| = 1$. Auf $U = V\backslash\,(\mathbb{R}\cdot e)$ ist das Vektorfeld

$$B(p) = C\frac{e \times p}{\|e \times p\|^2}$$

   mit $C \in \mathbb{R}$ definiert.[3] Es hat die Symmetrien: $B(p + \lambda e) = B(p)$ und $B(R\,(p)) = R\,(B(p))$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und R Drehung um e. Beachte: $\|e \times p\|$ ist der Abstand zwischen p und der Achse $\mathbb{R}\cdot e$.

   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$ auf U.

   (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $A(p) = f(\|e \times p\|)\cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B. Finden Sie also eine Lösung A von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen? [4]

   (c) Ist B konservativ?

[1] Arbeiten Sie dabei entweder ohne Benützung einer Basis, also koordinatenfrei, oder mithilfe der Koordinaten des Vektorraumes zu einer ONB $\underline{e}$. Benützen Sie die Kettenregel.

[2] $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Fig. 1 zeigt das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$.

[3] B ist für $C = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R}\cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I.

[4] Eine Lösung ergibt sich mit $f(x) = -C\ln(x)$.