12. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 16. Juni 2003 / GG

Fourierintegrale

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$(Ff)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx, \qquad k \in \mathbb{R}$$

   der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen. Geben Sie auch die Funktionen a, b der sin / cos-Version

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} [a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)]\, dk$$

   der Umkehrformel an.

   (a) $f(x) = 1$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst.

   (b) $g(x) = f(\frac{x-\xi}{L})$ mit f wie in a), wobei $\xi, L \in \mathbb{R}$ und $L > 0$.

   (c) $f(x) = x$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Überprüfen Sie unter Verwendung von Beispiel 1a) den Teil 4) des Fouriertrafosatzes der Vorlesung.

2. Sei $f(t) = \exp(-\lambda\,|t|)\sin(\Omega t)$ für $\lambda, \Omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie $a = 0$ und

$$b(\omega) = 2i\,(Ff)(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda\Omega\omega}{\lambda^4 + 2\lambda^2\left(\omega^2 + \Omega^2\right) + \left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2}.$$

   Sei $\nu_0 = 440\,\mathrm{Hz}$, $\Omega = 2\pi\nu_0$ und $\lambda = 10^{-1}\,\mathrm{Hz}$. Skizzieren Sie die Spektralfunktion $\nu \longmapsto b(2\pi\nu)$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ und lesen Sie das Frequenzintervall um die "Trägerfrequenz" ν_0 ab, in der diese Funktion größer als ein Zehntel ihres Maximalwertes ist.

3. Sei f wie in Bsp.1a)

   (a) Überprüfen Sie daran Teil 1) des Fouriertrafosatzes.

   (b) Berechnen Sie die Faltung $f * f$ und überprüfen Sie Teil 2) des Fouriertrafosatzes.