

(Inhomogen) lineare Gleichungen zweiter Ordnung

1. I sei ein offenes, reelles Intervall. Die Funktionen $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen von

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Die Wronskideterminante $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ von y_1 und y_2 ist definiert durch

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie zunächst $W' = -pW$. Dann beweisen Sie: Aus $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$ folgt, dass $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.
- (b) Sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von (1), für das $y_1(x_0) \neq 0, y_2(x_0) = 0$ und $W(x_0) = 1$ gilt. Dann existiert eine Umgebung $J \subset I$ von x_0 mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Leiten Sie aus

$$W(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \right)$$

die folgende Integraldarstellung von $y_2(x)$

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1(\xi)^2} \exp \left(- \int_{x_0}^{\xi} p(t) dt \right) d\xi$$

für $x \in J$ ab.

- (c) Formulieren Sie Gleichung (1) als (nichtautonomes) lineares System erster Ordnung $v' = A(x)v$ auf $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$; geben Sie also die Abbildung $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die parameterbereinigte gedämpften Schwingungsgleichung

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0. \quad (2)$$

- (a) Bestimmen Sie mittels Exponentialansatzes ein Fundamentalsystem von (2). Unterscheiden Sie dabei die 3 Fälle $0 \leq \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des gefundenen Lösungspaares mit der Wronskideterminante.
- (b) Benützen Sie das Verfahren von Beispiel 1), um für $\alpha = 1$ aus der Lösung $y_1(x) = \exp(-x)$ eine zweite linear unabhängige Lösung zu erhalten.
3. Finden Sie für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(q_1 x) \cos(q_2 x)$ mit $q_2 > q_1 + 1 > 1$ per Ansatz eine (maximale) Lösung von $y'' + y = g$. Hinweis: $\cos(\alpha) \cos(\beta) = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) / 2$. Machen Sie für eine partikuläre Lösung von $y''(x) + y(x) = \cos(qx)$ den Ansatz $y(x) = A \cos(qx)$.

Lösung:

$$y(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos((q_2 + q_1)x)}{(q_2 + q_1)^2 - 1} + \frac{\cos((q_2 - q_1)x)}{(q_2 - q_1)^2 - 1} \right)$$

Die Abbildung zeigt g (strichliert) und y (durchgezogen) für den Fall $q_1 = 9$ und $q_2 = 11$. Liegt im Fall der Figur Resonanz vor?

