1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 10. März 2003/ GG

Endliche Wahrscheinlichkeitsräume, Stochastische Variable, Binomialverteilung

1. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert. Ein Elementarereignis dieses Spiels ist somit ein Paar (i, j) von Augenzahlen $i, j \in \{1, .., 6\}$.

   (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Würfelspiels die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\omega) := W(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ an.

   (b) Die Teilmenge $A \subset \Omega$ steht für das Ereignis "Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim"? Welche Wahrscheinlichkeit hat A?

   (c) $B \subset \Omega$ steht für: "Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11". Sind A und B stochastisch unabhängig, dh: gilt $W(A \cap B) = W(A)W(B)$?

   (d) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, (i, j) \mapsto i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von f:

   $$\langle f \rangle_W = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) f(\omega), \quad \mathcal{V}(f) = \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2 .$$

   (e) Geben Sie für den Transport[1] W_f von W mit f die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_f auf $f(\Omega)$ an. Berechnen Sie also für jedes $x \in f(\Omega)$ die Zahl $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$ =? Zeigen Sie $\langle f \rangle_W = \sum_{x \in f(\Omega)} x p_f(x)$.

2. Beantworten Sie die Frage 1a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Liegt wie in 1a) eine Gleichverteilung vor?

3. Ein instabiler Atomkern wird nach Ablauf einer Sekunde darauf untersucht, ob er zerfallen ist oder nicht. Die Zerfallswahrscheinlichkeit sei $x \in [0, 1]$. Der W-raum (Ω, W) dieses Versuchs ist $\Omega = \{0, 1\}$ mit dem W-maß W, für das $W(\{1\}) = x$ gilt. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis "Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat der Zufallsversuch "Welche der N Kerne zerfallen innerhalb einer Sekunde?" den W-raum (Ω_N, W_N) mit

   $$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$

   Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, .., \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, .., \omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N?

   (c) Zeigen Sie, dass der Transport von W_N mit Z_N die *Binomialverteilung* auf $\{0, 1, .., N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0, 1, .., N\}$

   $$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi(k; N, x) := x^k (1 - x)^{N-k} \frac{N!}{(N - k)!k!}.$$

   (d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb von einer Sekunde mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

   (e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) an der Chebyshev Ungleichung[2].

---

[1] Es gilt für jedes $A \subset f(\Omega)$ dass $W_f(A) = W(f^{-1}(A))$, wobei $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$.

[2] Für eine reelle stochastische Variable f auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) gilt

$$W(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f \rangle| \geq t\}) \leq \mathcal{V}(f) t^{-2}.$$