9. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 27. Mai 2002

Fourierreihen

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

der folgenden 2π-periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

   (a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ (Sägezahn)

   (b) $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$ (Kippschwingung)

   (c) $f(x) = \left|\sin(\frac{x}{2})\right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)

   (d) $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$

2. (Außer Wertung) Überprüfen Sie für die Funktionen aus Beispiel 1 die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx$$

und geben Sie das kleinste $N \in \mathbb{N}_0$ an, für das

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \geq \frac{9}{10}\|f\|^2 .$$

3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der L-periodischen Funktion f, für die $f(x) = f(-x)$ und mit $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x)/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

gilt. Skizzieren Sie die Abbildung $\frac{2\pi}{L}k \mapsto |c_k|$. Wie verändert diese sich, wenn L vergrößert wird? Konvergieren die Fourierkoeffizienten c_k bei festem L für $\varepsilon \to 0$? (δ-Kamm)