7. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 6. Mai 2002

Flussabbildung homogen linearer Systeme gewöhnlicher Diffgleichungen 1. Ordnung

1. (Dreidimensionale Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) Sei V ein dreidimensionaler, orientierter reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wem das zu allgemein ist, der möge $V = \mathbb{R}^3$ wählen. Für ein festes $n \in V$ ist dann die lineare Abbildung $L_n : V \to V, v \mapsto n \times v$ definiert (Vektorprodukt). Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

   (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld zu L_n.

   (b) Es sei die Kurve $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ durch
   $$\gamma_v(t) = n \langle n, v \rangle + \cos(\omega t)\,(v - n \langle n, v \rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$$
   für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Systems $\dot{v} = \omega L_n(v)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welchen Orbit hat γ_v? Geben Sie die (maximale) Flussabbildung Φ des Vektorfeldes ωL_n an. Hinweis: $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$.

   (c) Kontrollieren Sie $\gamma_v(t) = \exp(t\omega L_n)(v)$.

   (d) Zeigen Sie für die Beschleunigung $b_v(t) = \frac{d^2\gamma_v}{dt^2}(t)$ der Integralkurve
   $$b_v(t) = -\omega^2 \left(\gamma_v(t) - n \langle n, \gamma_v(t) \rangle\right).$$

   (e) Wie kurz müsste der Tag sein, damit lose Gesteinsbrocken von der Oberfläche der Erde abheben würden?

2. (Quantenmechanik eines Spin-1/2-Systems) Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für zwei Vektoren e_1 und e_2 gelte $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma(e_1) = e_2$ und $\sigma(e_2) = e_1$.

   (a) Berechnen Sie die (maximale) Flussabbildung Φ des Vektorfeldes $-i\sigma$. Hinweis: $\sigma^{2n} = id$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Kontrollieren Sie $\langle \Phi(t, v), \Phi(t, w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. (Unitarität)

   (c) Zeigen Sie $|\langle \Phi(t, e_1), e_1 \rangle|^2 = \cos^2(t)$.

3. (Wronskideterminante) I sei ein offenes, reelles Intervall. Die Funktionen $p : I \to \mathbb{R}$ und $q : I \to \mathbb{R}$ seien stetig und $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ seien Lösungen von
   $$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$
   Die Wronskideterminante $W : I \to \mathbb{R}$ von y_1 und y_2 ist definiert durch
   $$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie zunächst $W' = -pW$. Dann beweisen Sie: Aus $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$ folgt, dass $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

   (b) Leiten Sie für ein Fundamentalsystem (y_1, y_2), für das $y_1(x_0) \neq 0, y_2(x_0) = 0$ und $W(x_0) = 1$ gilt, aus
   $$W(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)$$
   in einer Umgebung von x_0 die folgende Integraldarstellung von y_2
   $$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1(\xi)^2} \exp\left(-\int_{x_0}^{\xi} p(t)dt\right) d\xi$$
   ab. (Siehe zB Hassani, Math Meth, Springer, 2000, p. 499f.)

   (c) Formulieren Sie Gleichung (1) als (nichtautonomes) lineares System erster Ordnung $v' = A(x)v$ auf $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Geben Sie die Abbildung $A : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ an. Erkennen Sie a) als Spezialfall eines Satzes aus der Vorlesung? Was bedeutet a) für die Resolvente $R_{x_0} : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ des Systems?