6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 29. April 2002

1. Klausur

1. **(2 P)** W sei die geometrische Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ zum Parameter $x \in (0,1)$. Es gilt also:

$$W(\{n\}) = (1-x)\,x^n.$$

   Welche Wahrscheinlichkeit $W(G)$ hat das Ereignis $G = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist gerade}\}$?

2. W_λ sei die Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}$ zum Parameter $\lambda > 0$.

   (a) **(4 P)** Welchen Erwartungswert hat die reelle stochastische Variable $x \mapsto \sin(x)$ unter W_λ?

   (b) **(3 P)** Welche Verteilungsfunktion hat die stochastische Variable $x \mapsto x^2$ unter W_λ? Bestimmen Sie auch ihre Dichte.

3. **(4 P)** Sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -\frac{x}{\sqrt{y}}.$$

   Berechnen Sie die maximale Lösung von $y' = f(x,y)$ durch $(0,1)$ (inklusive Definitionsbereich).

4. **(4P)** Berechnen Sie die maximale Lösung von

$$y' + y = \sin(x) + 1$$

   durch $(0,1)$. Hinweis: In Beispiel 5, Blatt 4 wurde gezeigt, dass für jede maximale Lösung y_1 von $y' + y = \sin(x)$ ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

   Sie benötigen also nur mehr eine einzige Lösung y_2 von $y' + y = 1$. Warum?

Lösung:

1. $W(G) = \sum_{n\in G}(1-x)x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}(1-x)x^{2n} = (1-x)\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\left(x^2\right)^n = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$. Es gilt also: $\frac{1}{2} < W(G) < 1$.

2. Die Dichte der Exponentialverteilung W_λ ist: $\rho(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$ für $x > 0$ und $\rho(x) = 0$ sonst.

   (a)

$$\begin{aligned}
\langle\sin\rangle_{W_\lambda} &= \int_0^\infty \sin(x)\,\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\
&= \frac{\lambda}{2i}\int_0^\infty \left(e^{ix-\lambda x} - e^{-ix-\lambda x}\right)dx \\
&= \frac{\lambda}{2i}\left[\left(\frac{e^{(i-\lambda)x}}{i-\lambda}\right) + \left(\frac{e^{-(i+\lambda)x}}{i+\lambda}\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{\lambda}{2i}\left[-\frac{1}{i-\lambda} - \frac{1}{i+\lambda}\right] \\
&= -\frac{\lambda}{2i}\left[\frac{i+\lambda}{(i-\lambda)(i+\lambda)} + \frac{i-\lambda}{(i-\lambda)(i+\lambda)}\right] \\
&= -\frac{\lambda}{2i}\left[\frac{2i}{-1-\lambda^2}\right] \\
&= \frac{\lambda}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

   (b) Die Verteilungsfunktion F: sie ist für alle $\xi \in \mathbb{R}$ durch

$$F(\xi) = W_\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq \xi\right\}\right)$$

   definiert. Daher: $F(\xi) = 0$ für alle $\xi \leq 0$. Für $\xi > 0$ folgt aus $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq \xi\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid x \leq \sqrt{\xi}\right\}$

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_0^{\sqrt{\xi}} \lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\xi}} -\frac{d}{dx}\left(\exp(-\lambda x)\right)dx \\
&= -\exp(-\lambda x)\,|_0^{\sqrt{\xi}} \\
&= 1 - \exp\left(-\lambda\sqrt{\xi}\right).
\end{aligned}$$

   Die Dichte ρ erfüllt somit $\rho(\xi) = F'(\xi) = 0$ für alle $\xi < 0$ und $\rho(\xi) = F'(\xi) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\xi}}\exp\left(-\lambda\sqrt{\xi}\right)$ für alle $\xi > 0$. Bei 0 ist F nicht differenzierbar. Der Funktionswert $\rho(\xi)$ wächst für $\xi \downarrow 0$ unbeschränkt. Der Wert $\rho(0)$ kann beliebig gewählt werden, da es nur auf $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi}\rho(x)dx$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ ankommt.

3. Eine Stammfunktion von $x \mapsto -x$ auf $\mathbb{R}$ ist $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$. Eine Stammfunktion von $y \mapsto \sqrt{y}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ und somit gilt für jede lokale Lösung y in ihrem Definitionsbereich

$$\frac{2}{3}y(x)^{\frac{3}{2}} = \frac{-x^2}{2} + \frac{C}{2}$$

   mit einem $C \in \mathbb{R}$. Aus $y^{\frac{3}{2}} > 0$ folgt $C > 0$ und x ist auf Werte beschränkt, für die $-x^2 + C > 0$. Diese Menge ist das Intervall $\left(-\sqrt{C}, \sqrt{C}\right)$. Somit ist eine maximale Lösung

$$y_C : \left(-\sqrt{C}, \sqrt{C}\right) \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \left[\frac{3}{4}\left(C - x^2\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

   Die maximale Lösung y_C durch den Punkt $(0,1)$ erfüllt $y_C(0) = 1$ und daher $\left(\frac{3}{4}C\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. Daraus folgt $C = \frac{4}{3}$.

4. Sei y_1 Lösung von $y' + y = \sin(x)$ und y_2 Lösung von $y' + y = 1$ Dann ist $y_1 + y_2$ Lösung von $y' + y = \sin(x) + 1$. Die allgemeine maximale Lösung y_1 von $y' + y = \sin(x)$ wurde berechnet. Es gilt mit $C \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für jede Lösung y_2 von $y' + y = 1$ gilt $(y_2 - 1)' + (y_2 - 1) = 0$. Daher gilt für jede maximale Lösung y_2 von $y' + y = 1$ auf $\mathbb{R}$ mit $C' \in \mathbb{R}$

$$y_2(x) = 1 + C'e^{-x}.$$

Daher ist die Menge der maximalen Lösungen von $y' + y = \sin(x) + 1$

$$\left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(x) = 1 + Ce^{-x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die Lösung durch den Punkt $(0, 1)$ gilt

$$1 = 1 + C + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + C - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daraus folgt $C = 1/2$.