5. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 22. April 2002

Gewöhnliche Differentialgleichungen (erster Ordnung inhomogen linear: retardierte/avancierte Lösung; unstetige Koeffizientenfunktionen; Dirac-δ-Quelle)

1. Zwischen den Enden eines Drahtes mit (konstantem) Widerstand $R > 0$ und (konstanter) Selbstinduktivität $L > 0$ liege eine zeitabhängige Spannung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann[1] näherungsweise für alle $t \in \mathbb{R}$

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = U(t). \tag{1}$$

   (a) Berechnen Sie für den Fall eines Gaußpulses mit $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)$$

   jene maximale Lösung I_{ret} von (1), für die $\lim_{t\to-\infty} I_{ret}(t) = 0$. (Uneigentliche Anfangsbedingung zur retardierten Lösung) Hinweis: Lassen Sie die untere Integrationsgrenze t_0 in der *Variation der Konstantenformel* gegen $-\infty$ gehen und ergänzen Sie das Argument der Exponentialfunktion im Integranden zu einem vollständigen Quadrat von $\alpha\xi + \beta$.

   (b) Berechnen Sie für den Fall a) jene maximale Lösung I_{av} von (1), die aus der Variation der Konstantenformel durch $I_{av}(t_0) = 0$ und den Grenzübergang $t_0 \to \infty$ entsteht. (Avancierte Lösung)

   (c) Berechnen Sie aus a) und b) die Differenz $\Delta I := I_{ret} - I_{av}$ und kontrollieren Sie

$$L\frac{d}{dt}\Delta I(t) + R\Delta I(t) = 0.$$

   (d) Wählen Sie U_0 so, dass für ein gegebenes $A \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t)dt = A.$$

   Berechnen Sie dann, falls existent, bei festen Werten A, L und R die punktweisen Limiten $\lim_{\tau\to 0} I_{ret}(t)$ und $\lim_{\tau\to 0} I(t)_{av}$.

2. Wählen Sie in der Differentialgleichung (1) die folgende unstetige Spannungsfunktion ("Rechteckpuls") U mit $U_0 \in \mathbb{R}$

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Dieses Problem setzt sich aus drei Differentialgleichungen $y' = a_i(x)y + b_i(x) = f_i(x, y)$ im Sinn der Vorlesung mit den offenen Intervallen $D_1 = (-\infty, 0)\,, D_2 = (0, T)$ und $D_3 = (0, \infty)$ als Definitionsbereichen D_i für a_i und $b_i$zusammen.

   (a) Berechnen Sie jene drei Lösungen α_i von $y' = f_i(x, y)$, die Einschränkungen einer (einzigen!) stetigen Funktion α auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$ sind. Geben Sie α an.

   (b) Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit von α und skizzieren sie den Graphen der Abbildung $x \mapsto \alpha'(x)$. ($L\dot{I}$ gibt im Fall der Serienschaltung einer Spule und eines Ohmschen Widerstandes die Spannung zwischen den Enden der Spule an.)

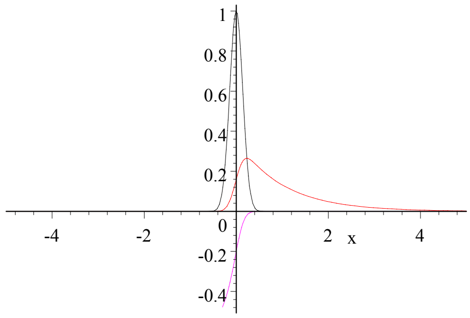
   (c) Führen Sie in der Funktion α von a) den Grenzübergang $T \to 0$ bei festen Werten $R, L, TU_0 = A$ aus. Vergleichen Sie das Ergebnis mit jenem von 1d).

[1] Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

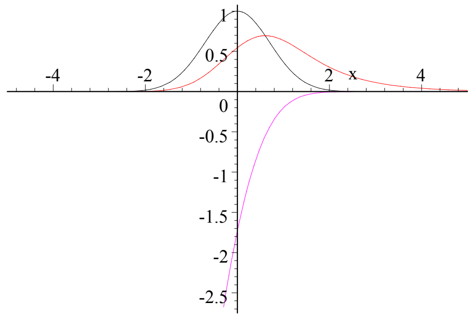
Einige Spezialfälle (numerisch) mit den Bezeichnungen: $T = L/R$ (Reaktionszeit des RL-Kreises), $x = t/T$ (Zeit in Einheiten von T), $\Delta = \tau/T$ (Pulsbreite in Einheiten von T), $I_{stat} = U_0/R$ (Stromstärke bei statischer Spannung), $J_{ret}(x) = I_{ret}(t)/I_{stat}$ (dynamischer Strom in Einheiten des statischen Wertes, analog für J_{av}), $u(x) = U(t)/U_0$ (angelegte Spannung in Einheiten des Maximalwertes)

$$\begin{aligned} J_{ret}(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Delta \exp\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - x\right)\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta} - \frac{\Delta}{2}\right)\right) > 0 \\ J_{av}(x) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Delta \exp\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - x\right)\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta} - \frac{\Delta}{2}\right)\right) < 0 \\ u(x) &= \exp\left(-\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right) \end{aligned}$$

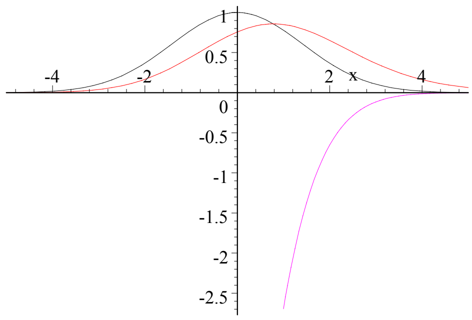
Die Figuren skizzieren die Graphen von J_{ret} (rot), J_{av} (magenta) und u (schwarz) für die Pulsbreiten $\Delta \in \{1/5, 1, 2, 5\}$.



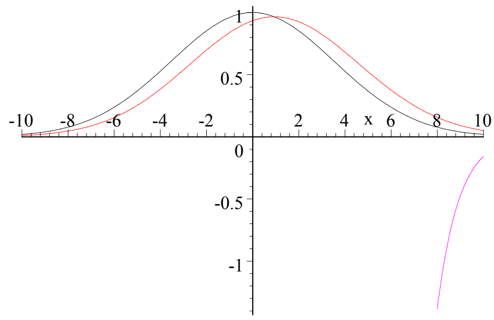
$\Delta = 1/5$



$\Delta = 1$



$\Delta = 2$



$\Delta = 5$