4. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 15. April 2002

Gewöhnliche Differentialgleichungen (erster Ordnung mit getrennten Variablen bzw. inhomogen linear)

1. Für die Füllhöhe $y(t)$ eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zur Zeit t, das sich über ein Loch im waagrechten Boden entleert, gilt näherungsweise mit $\alpha > 0$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}.$$

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung. Ist sie linear?

   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?

2. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im homogenen Schwerefeld (Beschleunigungskonstante $g > 0$) gilt (mit linearer Reibung, Reibungskoeffizient $\gamma > 0$)

$$\frac{d}{dt}v(t) = -g - \gamma v(t)$$

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung. Ist sie linear?

   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = v_0 > 0$. Hat $v(t)$ einen Grenzwert für $t \to \infty$?

3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$.

   (a) Skizzieren sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Ist sie linear?

   (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)

   (c) Zeigen Sie (ohne Verwendung von L), dass für Lösungen y der Differentialgleichung gilt: $\left(x^2 + y^2\right)' = 0$.

   (d) Sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$. Bestimmen Sie die Menge M der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

4. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$.

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Ist sie linear?

   (b) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)

   (c) Zeigen Sie (ohne Verwendung von L), dass für Lösungen y der Differentialgleichung gilt: $\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.

5. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -y + a \cdot \sin(\omega x)$ mit reellen Konstanten a, ω. (Radioaktiver Zerfall mit periodischer Nachbrütrate)

   (a) Bestimmen Sie die Menge L der maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. (Ist sie vom Typ der getrennten Variablen?)

   (b) Skizzieren Sie den Graphen der Lösung y mit $y(0) = 1$ für $\omega = a = 1$.