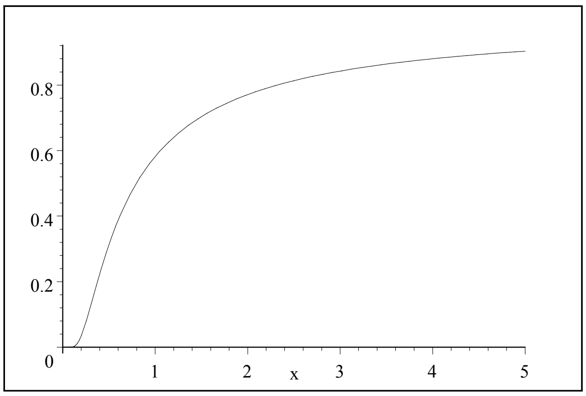
2. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 18. März 2002

Wahrscheinlichkeit

1. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum hat *Lotto Sechs aus 45*? Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Elementarereignis? Hinweis: Wieviele injektive[1] Abbildungen $f : \{1, 2, ..6\} \to \{1, 2, .., 45\}$ gibt es? Sei f eine solche Abbildung. Wieviele injektive Abbildungen $f' : \{1, 2, ..6\} \to \{1, 2, .., 45\}$ gibt es, für die $f'(\{1, 2, ..6\}) = f(\{1, 2, ..6\})$ gilt? Wieviele sechselementige Teilmengen hat also $\{1, 2, .., 45\}$? Für $N, k \in \mathbb{N}_0, k \leq N$ heißen die Zahlen
$$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} := \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$
Binomialkoeffizienten[2]. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := k(k-1)..1$ und $0! := 1$.

2. Ein instabiler Atomkern wird ab einem Startzeitpunkt in gleichen Zeitabständen auf sein Intaktsein abgefragt. Zerfällt er zwischen Zeitpunkt n und $n+1$, so hat das Zufallsexperiment den Ausgang $n \in \mathbb{N}_0$, wir sagen der Kern zerfällt im Intervall n. Dieses Elementarereignis habe die Wahrscheinlichkeit $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$ für ein festes x mit $0 < x < 1$. (Geometrische Verteilung zum Parameter x)
   (a) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern in irgendeinem Intervall $n < N$? Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$?
   (b) Die stochastische Variable $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$ heißt Lebensdauer. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat τ? Hinweis:
   $$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
   (c) Skizzieren Sie den Graphen der Verteilung p (von τ).
   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern, der in einem Intervall $n \geq M$ zerfällt, in irgendeinem Intervall mit $n < M+m$? Hinweis: Die relative Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq M\}$ ist zu ermitteln.
   (e) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern in irgendeinem Intervall n mit $M \leq n < M+m$? Sind A und B stochastisch unabhängig? Hinweis: $W(A \cap B) = ?$

3. Die Zahl der Photonen n im thermischen Zustand einer elektromagnetischen Hohlraummode ist geometrisch verteilt mit Parameter $x = \exp(-\frac{h\nu}{kT})$. ($T$...Temperatur, h...Plancksche Konstante, ν...Frequenz der Mode, k...Boltzmannkonstante) Kontrollieren Sie den Graphen von $\frac{kT}{h\nu} \mapsto \langle n \rangle \frac{h\nu}{kT}$.



Graph von $x \mapsto \frac{1}{x\exp(1/x) - x}$

[1] Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls für alle $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.
[2] Es gilt
$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} x^k y^{N-k}$$