12. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 17. Juni, 1. Juli 2002

Grad, Rot, Div, Δ; Sätze von Gauß & Stokes

1. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar und sei $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, p \mapsto |p|$. Zeigen Sie auf $\mathbb{R}^3 \backslash 0$, dass
$$\Delta\left(f(r)\right) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$
Bestimmen Sie die Menge aller maximalen Lösungen von $y'' + \frac{2}{x} y' = 0$ mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}_{>0}$. Welche der zugehörigen Lösungen $f(r)$ sind Einschränkungen stetiger, auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierter Funktionen?

2. Berechnen Sie die Divergenz der Gradientenfelder aus Bsp. 1 von Übung 11.

3. Sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, p \mapsto Cp$ mit $C \in \mathbb{R}$.[1] Es gilt: $div(E) = 3C$.[2] Die Kugel um 0 mit dem Radius R sei K. Kontrollieren Sie den Gauß'schen Satz
$$\int_K div(E) = \int_{\partial K} E.$$

4. Für $e \in V = \mathbb{R}^3$ gelte $|e| = 1$. Auf $U = V \backslash \mathbb{R} \cdot e$ ist das Vektorfeld
$$B(p) = C \frac{e \times p}{|e \times p|^2}$$
mit $C \in \mathbb{R}$ definiert.[3] Es hat die Symmetrien: $B(p + \lambda e) = B(p)$ und $B(Rp) = R\left(B(p)\right)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und R Drehung um e. Beachte: $|e \times p|$ ist der Abstand zwischen p und der Achse $\mathbb{R} \cdot e$.
   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$.
   (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $A(p) = f(|e \times p|)e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B. Finden Sie also eine Lösung A von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen?[4]
   (c) Ist B konservativ?

5. Sei Φ der Fluss von B aus 3) mit $e = e_3$ durch das Rechteck $F = [R_1, R_2] \times 0 \times [0, 1]$ mit $0 < R_1$ und dem (konstanten) Orientierungsfeld e_2. Zeigen Sie
$$\Phi = C \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

6. Kontrollieren Sie Ihr Vektorpotential A aus 3b) mit dem Stokes'schen Satz
$$\int_F rot(A) = \int_{\partial F} A$$
für F aus 4).

---

[1] Für $C = \rho/3\varepsilon_0$ stimmt E mit dem elektrischen Feld einer geladenen Kugel konstanter Ladungsdichte ρ im Inneren der Kugel überein. Auch die Schwerkraft im Erdinneren ist von dieser Art.

[2] E ist konservativ, denn für $\Phi = -Cr^2/2$ mit r wie in 1) gilt $E = -grad(\Phi)$. Wegen $div(E) = 3C$ existiert für $C \neq 0$ zu E kein Vektorpotential, denn $E = rot(A) \Rightarrow div(E) = 0$.

[3] B ist für $C = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I.

[4] Eine Lösung ergibt sich mit $f = -C \ln$.