11. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 10. Juni 2002

Richtungsableitung, Gradientenfeld, Linienintegral

1. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie das Gradientenfeld der folgenden Funktionen vom Typ $F : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.[1]

   (a) $f(p) = -\|p\|^{-1}$ für alle $p \in U = V\backslash 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.

   (b) $g(p) = f(\frac{p-\xi}{L})$ für alle $p \in V\backslash\xi$ mit f wie in a); $L > 0$ und $\xi \in V$.

   (c) $h(p) = \cos\langle k, p\rangle$ für alle $p \in V$ mit $k \in V$. Skizzieren Sie $grad(h)$ für $n = 2$.

   (d) $\phi(p) = \sum_{i=1}^{m} \langle k_i, p\rangle^2$ für alle $p \in V$ mit $k_i \in V$.

   (e) $C(p) = \frac{1}{\|p\|}\langle e, p\rangle$ für alle $p \in U = V\backslash 0$, für $e \in V$ mit $\|e\| = 1$.[2]

   (f) Für $p \in U$ sei $\theta(p) = \arccos(C(p))$ (mit $0 \leq \theta \leq \pi$). Die Funktion θ ist in $p \in \mathbb{R}\cdot e$ nicht diffbar. Die Einschränkung θ_0 von θ auf $U_0 = V\backslash\mathbb{R}\cdot e$ ist jedoch überall diffbar. $grad(\theta_0) =?$ Hinweis: Kettenregel auf $C\mid_{U_0} = \cos(\theta_0)$ anwenden. Figur 1 zeigt das VF $(-xy, x^2)$.

2. Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \Rightarrow x < 0\}$ (geschlitzte Ebene). Für $\phi : U \to (0, 2\pi)$ gelte auf U $(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\phi, \sin\phi)$. Für $grad(\phi)$ (bezüglich des Standardskalarproduktes) folgt für alle $p \in U$ (siehe VO) $grad_p(\phi) = X(p)$ mit $X : \mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$. Figur 2 zeigt das VF $(-y, x)$. Achtung: der Definitionsbereich von X ist größer als jener von $grad(\phi)$!

   (a) Berechnen Sie die Abbildung $X[f] : p \mapsto \langle grad_p(f), X(p)\rangle = X_p[f]$ für alle $p \in \mathbb{R}^2\backslash 0$ zu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$. (Richtungsableitung von f bei p mit $X(p)$).

   (b) Berechnen Sie das Linienintegral von X längs eines Kreises um 0 mit Radius $R > 0$. Gibt es eine diffbare Funktion F, sodass $grad(F) = X$ auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$?

3. (Ohne Wertung) Existieren für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sonst, die Richtungsableitungen $X_0[f]$ für alle $X \in V$? Existieren die partiellen Ableitungen $(\partial_i)_0 f$ zur Standardbasis? Ist die Abbildung von V nach $\mathbb{R}$, die X auf $X_0[f]$ abbildet, linear? Existiert $grad_0(f)$?

$$X_p[f] = \lim_{0<\varepsilon\to 0}\frac{f(p+\varepsilon X)-f(p)}{\varepsilon}, \quad (\partial_i)_p f = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(p+\varepsilon e_i)-f(p)}{\varepsilon}$$

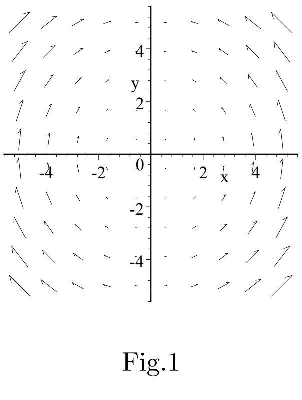

Fig.1

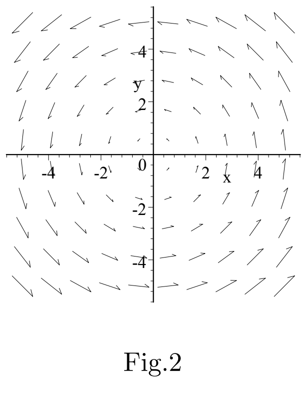

Fig.2

[1] Arbeiten Sie dabei entweder ohne Benützung einer Basis, also koordinatenfrei, oder mithilfe der Koordinaten des Vektorraumes zu einer ONB $\underline{e}$. Benützen Sie die Kettenregel.

[2] $C(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p.