1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / 11. März 2002

Wahrscheinlichkeit

1. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel.* Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert. Die beiden gewürfelten Augenzahlen bilden die möglichen Elementarereignisse beim Würfeln mit diesem Becher.

   (a) Was ist der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Würfelversuchs?

   (b) Welche Teilmenge $A \subset \Omega$ ist das Ereignis "Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist prim"? Welche Wahrscheinlichkeit hat A?

   (c) Das Ereignis B ist: "Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11". Sind A und B stochastisch unabhängig?

   (d) Die stochastische Variable f bildet auf die Summe der Augenzahlen ab. Was ist ihr Erwartungswert und was ihre Varianz?

   (e) Welches transportierte Wahrscheinlichkeitsmaß W_f liegt am Bildraum von f vor? Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse in $f(\Omega)$ an.

2. Beantworten Sie die Frage 1a) unter der Voraussetzung von zwei *ununterscheidbaren, ungezinkten Würfeln.*

3. Ein instabiler Atomkern wird nach Ablauf einer Sekunde untersucht, ob er zerfallen ist oder nicht. Die Zerfallswahrscheinlichkeit sei $x = 10^{-3}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Versuchs ist $\Omega = \{0, 1\}$ mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß W, für das $W(\{1\}) = x$ gilt. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis "Der Kern ist zerfallen".

   (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \omega$?

   (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, wird der Zufallsversuch "Welche der N Kerne zerfallen innerhalb einer Sekunde?" vom Wahrscheinlichkeitsraum

   $$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times .. \times A_N) := \prod_{i=1}^{N} W(A_i).$$

   beschrieben. Die Zahl der zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \to \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, ..\omega_N) := \sum_{i=1}^{N} Z(\omega_i)$ wiedergegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N?

   (c) Welches transportierte Wahrscheinlichkeitsmaß W_{Z_N} liegt am Bildraum von Z_N vor? Lösung: *Binomialverteilung*

   (d) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb von einer Sekunde mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.

   (e) Kontrollieren Sie die in d) berechneten Wahrscheinlichkeiten an der Chebyshev Ungleichung.