Entropie von Dichteoperatoren und von W-Maßen

1. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x \ln x$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie: (i) f ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar, (ii) f ist strikt konkav, (iii) $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$, (iv) f nimmt das Maximum nur in $1/e$ an. Welchen Wert hat das Maximum?

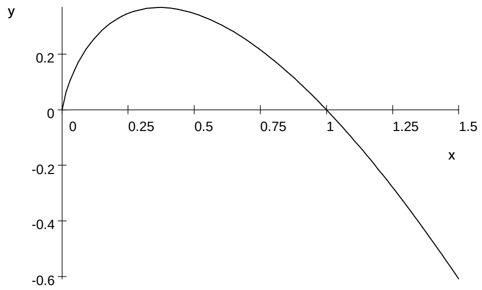

Figure 1: Der Graph von $-x \ln x$

2. Die Menge aller Dichteoperatoren eines Spin-1/2-Systems ist

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left(\mathbb{C}^2\right) &= \left\{\rho(\pi) \,|\, \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } |\pi| \leq 1\right\} \text{ mit} \\ \rho(\pi) &:= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die (von-Neumann) Entropie $S(\rho(\pi))$. Hinweis: $\rho(\pi)$ hat die Eigenwerte $\frac{1}{2}(1 \pm |\pi|)$. Skizzieren Sie die Abbildung $[-1,1] \ni \lambda \mapsto S(\rho(\lambda e_3)) = \mathcal{S}(\lambda)$ für $e_3 = (0,0,1)$. Lösung:

$$\mathcal{S}(x) = -k\left(\frac{1+x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{1-x}{2} \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)\right)$$

Aus welchem allgemeinen Grund ist diese Abbildung konkav? Siehe Figur (2).

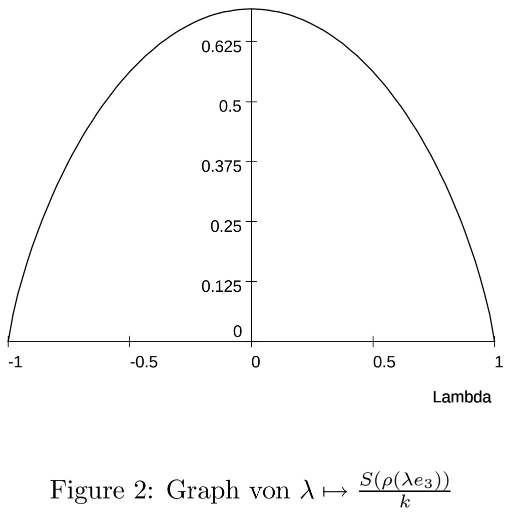

Figure 2: Graph von $\lambda \mapsto \frac{S(\rho(\lambda e_3))}{k}$

3. Ein Hamiltonoperator H habe die beiden Eigenwerte 0 und $\varepsilon > 0$. Der Entartungsgrad von 0 sei 1 und jener von ε sei g_1. Berechnen Sie die Entropie des Gibbszustands $\Gamma_\beta = e^{-\beta H}/Z(\beta)$. Welche kalorische Zustandsgleichung und welche Wärmekapazität hat dieses System? Diskutieren Sie das Verhalten von $S(\Gamma_\beta)$ und $\langle H \rangle_{\Gamma_\beta}$ für $T \to 0$ und für $T \to \infty$.

4. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ der Hilbertraum eines zusammengesetzten Quantensystems und seien $\rho_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}_i)$. Zeigen Sie, dass $S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2)$. Ein Hamiltonoperator auf $\mathcal{H}$ sei durch

$$H = H_1 \otimes \iota d_2 + \iota d_1 \otimes H_2$$

gegeben. Zeigen Sie für den Gibbszustand Γ_β des Gesamthamiltonoperators H, dass $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^1 \otimes \Gamma_\beta^2$. Zeigen Sie auch, dass die freie Energie additiv über die Teilsysteme ist.

5. Berechnen Sie die Boltzmann-Shannon Entropie der folgenden W-Räume (Ω, W). Verwenden Sie je nach Fall die passende Entropie

$$S(W) = -\sum_{\omega \in \Omega} W(\{\omega\}) \ln W(\{\omega\}) \text{ bzw. } S(W) = -\int_\Omega \rho(x) \ln \rho(x)\, dx$$

   (a) Geometrische Verteilung[1] auf $\mathbb{N}_0$ mit $p(n) = (1-x)\, x^n$ für ein $x \in (0,1)$.
   (b) Exponentialverteilung[2] auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit Dichte $\rho(x) = \beta e^{-\beta x}$ bezüglich dx für ein $\beta > 0$.
   (c) Gaußverteilung[3] auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte $\rho(x) = e^{-x^2/2\sigma}/\sqrt{2\pi\sigma}$ bezüglich dx für ein $\sigma > 0$.

6. Jeder der in Bsp. 5 behandelten Fälle enthält einen Parameter. Die Varianz von id hängt jeweils von diesem Parameter ab.

   (a) Wächst die Entropie tatsächlich mit der Varianz von id? Skizzieren Sie die Funktionsgraphen, aus denen die Parameterabhängigkeit der Entropie sichtbar wird.
   (b) Drücken Sie im Fall 5b) die Entropie auch durch den Erwartungswert von id aus. Zeigen Sie, dass die Abhängigkeit der Entropie von $\langle id \rangle$ durch eine konkave Funktion gegeben ist.
   (c) Drücken Sie im Fall 5c) die Entropie durch $\langle id^2 \rangle$ aus. Zeigen Sie, dass die Abhängigkeit der Entropie von $\langle id^2 \rangle$ durch eine konkave Funktion gegeben ist.

[1] Mit $x = e^{-\beta\hbar\omega}$ ist dies das Gibbsmaß am Energiespektrum eines harmonischen Quantenoszillators.
[2] Mit $x = mgh$ ist dies das Gibbsmaß am Raum der möglichen Höhen eines Gasteilchens im homogenen Erdschwerefeld.
[3] Mit $\sigma = m/\beta$ ist dies das Gibbsmaß auf einer der Impulskoordinaten eines freien Teilchens der Masse m.