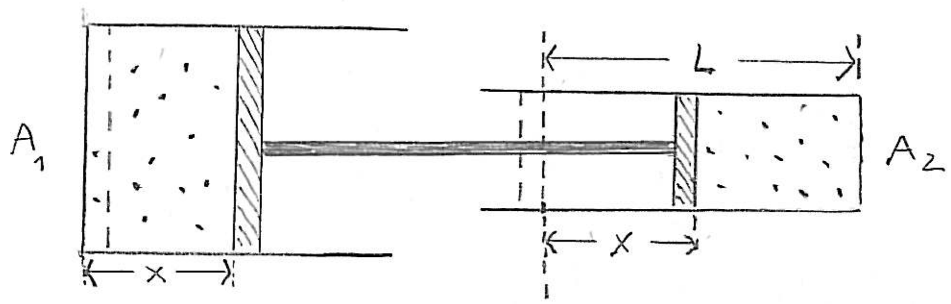
Ein zweikomponentiges ideales Gas

1. In einem beschränkten (messbaren) Gebiet $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ sind N_1 Massenpunkte der Masse m_1 und N_2 Massenpunkte der Masse m_2. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen sei vernachlässigbar. Für $E > 0$ sei $M_E^{N_1,N_2,\Lambda}$ die Gleichverteilung auf $D(E) = \{\omega : H(\omega) \leq E\}$. Zeigen Sie für die Entropie von $M_E^{N_1,N_2,\Lambda}$, die durch
$$S_{1\times 2}\left(M_E^{N_1,N_2,\Lambda}\right) = k \ln \frac{|D(E)|}{N_1!N_2!h^{sN}}$$
mit $N = N_1 + N_2$ gegeben ist, dass für große N_1 und N_2
$$S_{1\times 2}\left(M_E^{N_1,N_2,\Lambda}\right) \approx \mathcal{S}_1(E_1, V, N_1) + \mathcal{S}_2(E_2, V, N_1),$$
wobei $E_i := N_i(E/N), V = |\Lambda|$ und mit $\alpha_i = e\left(\frac{4e\pi m_i}{sh^2}\right)^{s/2}$
$$\mathcal{S}_i(E, V, N) = N_i k \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{E}{N}\right)^{\frac{s}{2}}\alpha_i\right]$$
Welche kalorische und welche thermische Zustandsgleichung hat das zweikomponentige System? Welche Wärmekapazität hat es? Hinweis: $1/T = \partial_E \mathcal{S}$ und $p/T = \partial_V \mathcal{S}$.

   Zwei ideale Gase im Kräftegleichgewicht

2. Zwei Zylinder mit den Querschnitten A_i seien mit verschiebbaren aber starr verbundenen Stempeln ausgestattet. Die beiden Querschnittsflächen $|A_i|$ brauchen nicht miteinander übereinzustimmen. Die Gesamtmasse von Kolben und Stempel habe den Wert M. Der maximale Kolbenhub sei L. In in den Zylindern befinden sich je $N_1 \gg 1$ und $N_2 \gg 1$ wechselwirkungsfreie Massenpunkte der Masse m_1 bzw. m_2. Anfänglich sei der Kolben fixiert und die Zustände ω_1, ω_2 der Gase seien mit den mikrokanonischen W-maßen $M^1_{E_1'}$ und $M^2_{E_2'}$ verteilt. Nach Freigabe des Kolbens stellt sich ein neuer Zustand ein, der mit dem mikrokanonischen W-Maß M_E des Gesamtsystems verteilt ist, wobei $E = E_1 + E_2$ gilt. Zeigen Sie, dass die Verteilung des Stempelzustands unter M_E eine Dichte $\rho_S : [0, L] \times \left[-\sqrt{2ME}, \sqrt{2ME}\right] \to \mathbb{R}$ hat, die in zwei Wahrscheinlichkeitsdichten $\rho_1 : [0, L] \to \mathbb{R}$ und $\rho_2 : \left[-\sqrt{2ME}, \sqrt{2ME}\right] \to \mathbb{R}$ faktorisiert. Es gilt also $\rho_S(X, P) = \rho_1(X)\rho_2(P)$, wobei die Dichten ρ_1 und ρ_2 die Dichten der Randverteilungen von ρ_S sind.
Zeigen Sie, dass die Verteilung des Kolbenhubs X die Betaverteilungsdichte $\rho_1 : [0, L] \to \mathbb{R}$ mit
$$\rho_1(X) = \frac{\Gamma(N+2)}{\Gamma(N_1+1)\Gamma(N_2+1)}\left(\frac{X}{L}\right)^{N_1}\left(1 - \frac{X}{L}\right)^{N_2}\frac{1}{L}$$
und $N = N_1 + N_2$ hat. Zeigen Sie weiter, dass der Stempelimpuls die Verteilungsdichte
$$\rho_1 : \left[-\sqrt{2ME}, \sqrt{2ME}\right] \to \mathbb{R} \text{ mit } \rho_2(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}N + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2ME}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}N + 1\right)}\left(1 - \frac{P^2}{2ME}\right)^{\frac{s}{2}N}$$
hat. Warum bewegt sich der Stempel für große N_1 und N_2 unter M_E fast sicher nur unmerklich? Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat X unter M_E? Welche Drucke p_i und welche Temperaturen T_i haben die beiden Gase, wenn der Stempel in der Position $\langle X\rangle_{M_E}$ ruht? Kontrollieren Sie, ob die Kräftegleichgewichtsbedingung $p_1|A_1| = p_2|A_2|$ gilt.
Lösung: $T_1 = T_2 = T = 2E/(skN)$ und
$$\langle X\rangle_{M_E} = L\frac{N_1}{N}, \quad p_1 = \frac{kTN_1}{\langle X\rangle|A_1|} = \frac{2}{s}\frac{E}{L|A_1|}, \quad p_2 = \frac{kTN_2}{(L - \langle X\rangle)|A_2|} = \frac{2}{s}\frac{E}{L|A_2|}.$$
Bemerkung: Die beiden Gase teilen sich den maximalen Hub L also im Verhältnis ihrer Teilchenzahlen auf: $\frac{\langle X\rangle_{M_E}}{L - \langle X\rangle_{M_E}} = \frac{N_1}{N_2}$. Dasselbe gilt für ihre Anteile E_1 und E_2 an der Energie E.


A1
L
A2
x
x