Betaverteilung der Teilenergie

1. Sind N_1 freie Massenpunkte in $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}^s$ und N_2 freie Massenpunkte in $\Lambda_2 \subset \mathbb{R}^s$, dann ist die Energie H_2 der Teilchen in Λ_2 unter dem mikrokanonischen W-Maß M_E des Gesamtsystems mit der Dichte
$$\rho_2(E_2) = c \cdot \left(1 - \frac{E_2}{E}\right)^{\frac{s}{2}N_1} \cdot \left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{s}{2}N_2 - 1}$$
verteilt. Ergänzen Sie den Beweis der Vorlesung für dieses Ergebnis, indem sie noch die Konstante c bestimmen. Lösung: mit $N = N_1 + N_2$ gilt
$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}N + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}N_1 + 1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}N_2\right)} \cdot \frac{1}{E}.$$

Exponentielle Höhenverteilung von Aerosolen[1]

2. Befindet sich ein ideales Gas der Temperatur T im Schwerefeld der Erde, dann gewinnt die Schwerkraft nur dann Einfluss auf die Eigenschaften des Gases, wenn der Höhenunterschied h zwischen den höchsten und niedrigsten Teilchen so groß ist, dass $mgh \gtrapprox kT$. Dabei ist m die Masse der Gasteilchen und g die Erdbeschleunigungskonstante. Die Bedingung vergleicht also die Bandbreite der potentiellen Energie mit der ungefähren Größe der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens, die ja $3kT/2$ ist. Welchen Wert hat die kritische Höhe kT/mg bei $T = 300\,\mathrm{K}$ für ein Wasserstoff-, ein Sauerstoffmolekül oder auch für ein Plutoniumatom? Welchen Wert hat es für ein Staubteilchen mit einer Masse von $1\,\mu\mathrm{g}$?

3. Sei nun ein Fremdstoffteilchen der Masse M Teil eines Systems von N freien Teilchen der Masse m in einem zylindrischen Gefäß $\Lambda = A \times (0, h) \subset \mathbb{R}^3$ der Höhe h. Die Hamiltonfunktion sei auf $\Omega = \Lambda^{N+1} \times \mathbb{R}^{3(N+1)}$ durch[2]
$$H(X, x_1, \dots x_N, P, p_1, \dots p_N) = \frac{|P|^2}{2M} + MgX^3 + \sum_{i=1}^{N} \frac{|p_i|^2}{2m}$$
gegeben. Dabei sind $X = \left(X^1, X^2, X^3\right) \in \Lambda$ und $P \in \mathbb{R}^3$ Ort und Impuls des Fremdteilchens. Für $E > 0$ sei M_E das mikrokanonische W-maß zu H. Zeigen Sie, dass für die Folge von Energien $E_N = \varepsilon N$ mit $\varepsilon > 0$ im Grenzfall $N \to \infty$ die Dichte der Randverteilung von (X, P) unter M_{E_N} gegen die Funktion
$$\rho : \Lambda \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } \rho(X, P) = \frac{e^{-\beta\left(\frac{|P|^2}{2M} + MgX^3\right)}}{Z(\beta)}$$
mit $\beta = \frac{3}{2\varepsilon}$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass
$$Z(\beta) = |A| \cdot \frac{1 - e^{-\beta Mgh}}{\beta Mg} \cdot \left(\frac{2M\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

4. Welche Erwartungswerte haben Gesamtenergie und kinetische Energie des Fremdstoffteilchens unter dem W-Maß mit der Verteilungsdichte ρ von Beispiel 3? Welchen Erwartungswert hat die Steighöhe Z? Es gilt $Z\left(X^1, X^2, X^3\right) = X^3$. Gegen welche Grenzwerte konvergieren diese Erwartungswerte für $h \to \infty$? Ermitteln Sie aus der Dichte ρ auch die Dichte der Höhenverteilung des Fremdstoffteilchens. Gegen welche Verteilung strebt die Höhenverteilung für $\beta \to 0$? Liegt am Boden eine Fremdstoffteilchenkonzentration c vor, fällt sie bis in eine Höhe ζ auf welchen Wert ab?

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Aerosol
[2] Die Gasteilchen werden als so massearm angenommen, dass ihre potentielle Energie vernachlässigt werden kann.

Zur Höhenverteilung von Aerosolen sind hier zwei Graphen aus Armin Hansels Vorlesung über Aerosole wiedergegeben. Aufgrund der logarithmischen Skala der Abszisse erscheinen exponentielle Höhenverteilungen linear.

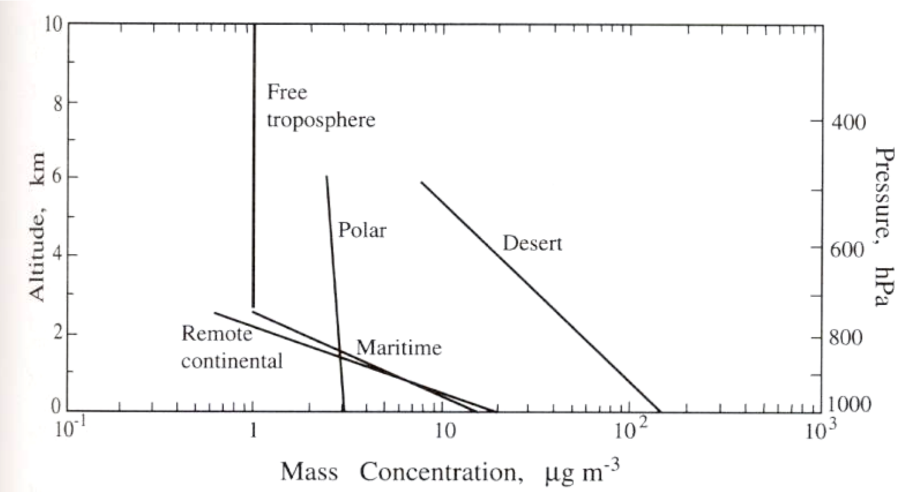

FIGURE 7.25 Representative vertical distribution of aerosol mass concentration (Jaenicke, 1993).

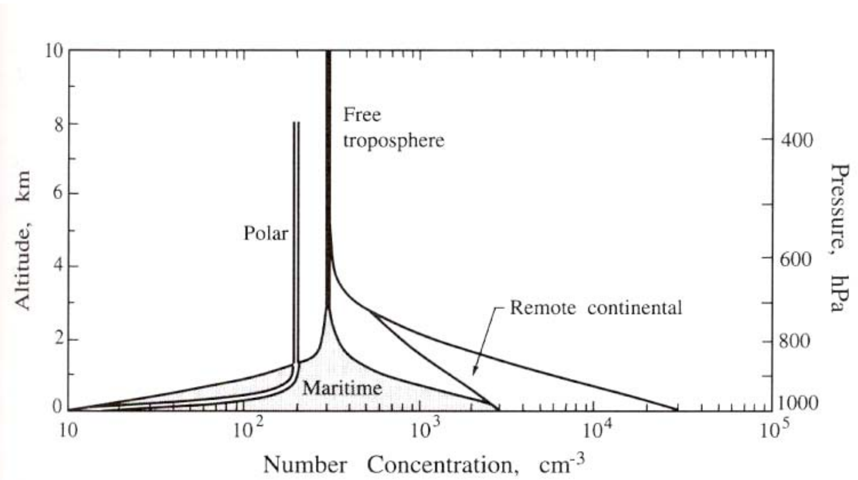

FIGURE 7.26 Representative vertical distribution of aerosol number concentration (Jaenicke, 1993). A range of concentrations is shown for marine and remote continental aerosols.