Maxwellverteilung

1. Die Geschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m in einem idealen, 3d-Gas der Temperatur $T > 0$ ist zufällig. Sie ist mit dem W-Maß W der Dichte $\rho : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit
$$\rho(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$
verteilt. Zeigen Sie für die Funktion $v = id_{\mathbb{R}_{>0}}$ und für die kinetische Energie $E = mv^2/2$:
$$\langle v\rangle_W = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad V_W(v) = \frac{kT}{m} \cdot \left(3 - \frac{8}{\pi}\right), \quad \langle E\rangle_W = \frac{3}{2}kT.$$
Hinweis: Benützen Sie Eulers Gammafunktion zur Berechnnung der Integrale. Welchen Zahlenwert hat $\langle v\rangle_W$ für ein Sauerstoffmolekül bei $T = 300\,\mathrm{K}$?

2. Verlässt ein Teilchen mit Geschwindigkeit v eine Quelle, dann legt es die Distanz L bis zu einem Detektor in der Laufzeit $t(v) = L/v$ zurück. Zeigen Sie für ein Teilchen mit Maxwellverteilter Zufallsgeschwindigkeit, dass mit $\tau = L\sqrt{\frac{m}{kT}}$
$$\langle t\rangle_W = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tau, \quad V_W(t) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \tau^2.$$
Hinweis: Bestimmen Sie die Dichte ρ_τ der Laufzeitverteilung. Zeigen Sie
$$\rho_\tau(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\tau}{t}\right)^4 \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{t}\right)^2}}{\tau}.$$

3. Eine gepulste Quelle der Temperatur $T > 0$ emittiert ein Isotopengemisch. N_1 Teilchen der Masse m_1 und N_2 Teilchen der Masse $m_2 > m_1$. Jedes Teilchen hat eine Maxwellverteilte Zufallsgeschwindigkeit und die Geschwindigkeiten sind stochastisch unabhängig voneinander. Welchen Erwartungswert $N_i(t)$ hat die Anzahl der Teilchen der Sorte i, die bis zur Zeit t eine Strecke der Länge L zurücklegen? Ist der Quotient $N_1(t)/N_2(t)$ konstant in t?