

---

Mikrokanonische W-Maße am Phasenraum der Mechanik

1. Ein freier Massenpunkt im Würfel: Für  $L, m, E \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $\Omega = [0, L]^3 \times \mathbb{R}^3$  und  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H(x, p) = |p|^2 / 2m$ . Geben Sie die (kumulativen) Verteilungsfunktionen der Energie  $H$  und des Geschwindigkeitsbetrags  $v$  unter dem mikrokanonischen W-maß  $M_E$  an. Welche Erwartungswerte und welche Varianzen haben  $H$  und  $v$  unter  $M_E$ ? Welche Dichte hat die Impulsverteilung und welche die Ortsverteilung unter  $M_E$ ?
2. Das Teilchen aus Beispiel 1, dessen zufälliger Zustand  $M_E$ -verteilt ist, wird zur Zeit 0 aus seinem Behälter freigelassen. Es wird anschließend auf einer Kugeloberfläche um 0 vom Radius  $R$ , die den Würfel einschließt, detektiert. Bestimmen Sie die Verteilung der Ankunftszeit beim Detektor unter der Näherung  $R \gg L$ . Geben Sie auch Erwartungswert und Varianz der Ankunftszeit an.
3. Zwei freie Massenpunkte im Würfel: Für  $L, m_1, m_2, E \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $\Omega = [0, L]^3 \times [0, L]^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  und  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|p_2|^2}{2m_2}.$$

Geben Sie die (kumulative) Verteilungsfunktion von  $H$  unter  $M_E$  an. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat  $H$  unter  $M_E$ ? Welche Dichte hat die Verteilung der Energie  $H_1$  von Teilchen 1 unter  $M_E$ ? Sind die Verteilungen von  $H_1$  und  $H_2$  dieselben? Hinweis:  $H_i(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{|p_i|^2}{2m_i}$ .