

Wahrscheinlichkeit

1. Eine Teilchenquelle sendet ein Teilchen in eine zufällige Richtung $\omega \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Sphäre der Einheitsvektoren) aus. Die Wahrscheinlichkeit der Emissionsrichtung sei gleichverteilt auf \mathbb{S}^2 . Sie stehen in ca. $r_0 = 5$ m Entfernung von der Quelle, die sich 1 m über dem Boden befindet.
 - (a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass Sie vom Teilchen getroffen werden.
 - (b) Auf welchen Wert sinkt die Trefferwahrscheinlichkeit ungefähr ab, wenn Sie Ihren Abstand zur Quelle von r_0 auf $\lambda r_0 = r > r_0$ vergrößern?
 - (c) Emittiert die Quelle $N = 1000$ Teilchen¹, deren Richtungen alle unabhängig voneinander und gleichverteilt sind, werden Sie in 5 m Entfernung mit welcher Wahrscheinlichkeit von genau k Teilchen getroffen? Wie groß ist der Erwartungswert der Trefferzahl? Wie groß ist ihre Varianz? Wie groß ist im Abstand $r > r_0$ die Wahrscheinlichkeit von keinem einzigen Teilchen getroffen zu werden. Ab welcher Entfernung ist diese „Überlebenswahrscheinlichkeit“ größer als $1/e$?

2. Wieder sendet eine Quelle ein Teilchen in eine zufällige Richtung $\omega \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (gleichverteilt) aus. In einer Entfernung L von der Quelle befindet sich eine unendlich ausgedehnte Platte. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Abstands $r(\omega)$ des Einschlagspunktes vom “ground zero” unter der Bedingung an, dass die Platte getroffen wird. Geben Sie auch die (bedingte) Wahrscheinlichkeitsdichte der Einschlagspunkte in der Platte an. Welchen (bedingten) Erwartungswert hat r ? Für welches $x \in \mathbb{R}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\omega : r(\omega) \leq x\}$ gleich $1/2$?

3. Ein betrunkenen Kanonier² schießt mit seiner Haubitze eine Granate mit $v = 1000$ m/s in eine zufällige Richtung ω der oberen Hemisphäre gleichverteilt ab. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Abstands r an, in dem die Granate am (flachen) Erdboden einschlägt. Welchen Radius hat der Kreis, innerhalb dessen die Granate mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ einschlägt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Kanonier selbst abschießt? (Jeder Einschlag im Umkreis von 50 m soll als Selbstabschuss gelten.) Lösung:

$$W(\{\omega : r(\omega) \leq x\}) = 1 - \cos\left(\frac{\arcsin\left(x \frac{g}{v^2}\right)}{2}\right) + \sin\left(\frac{\arcsin\left(x \frac{g}{v^2}\right)}{2}\right) \text{ für } 0 < x < v^2/g.$$

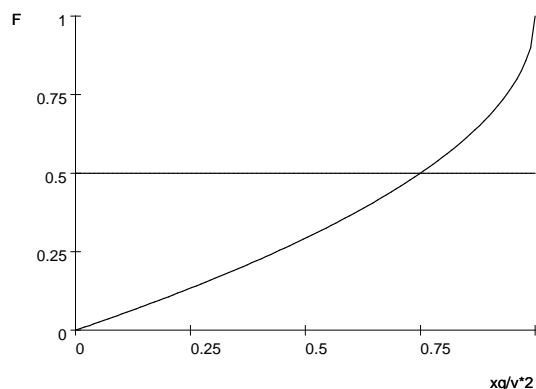


Figure 1:

¹Sie können sich auch, um etwas Konkretes vor Augen zu haben, eine explodierende Granate vorstellen.

²Luftreibung soll vernachlässigt werden. Das ist gar nicht so unrealistisch: http://en.wikipedia.org/wiki/Paris_Gun