Ideale Schrödingerquantengase - bosonisch & fermionisch

1. Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$-VR mit der ONB (e_1, e_2, e_3). Berechnen Sie aus der ONB $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k : i, j, k = 1, 2, 3\}$ von $\mathcal{H}^{\otimes 3} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ eine (orthonormierte) Besetzungszahlbasis des fermionischen und auch eine des bosonischen Unterraums von $\mathcal{H}^{\otimes 3}$. Tun Sie analoges für $\mathcal{H}^{\otimes 2}$. Welche Dimensionen haben die Räume $\left(\mathcal{H}^{\otimes 3}\right)_b, \left(\mathcal{H}^{\otimes 3}\right)_f$ und $\left(\mathcal{H}^{\otimes 2}\right)_b, \left(\mathcal{H}^{\otimes 2}\right)_f$?

2. Die Dichte eines ^{87}Rb Gases beträgt 10^{10} Teilchen pro Kubikzentimeter. Auf welche Temperatur T muss das Gas mindestens abgekühlt werden, damit ein Teil als Bosekondensat vorliegt, wenn der Gesamtspin eines Rubidiumatoms gleich 0 ist?

3. Zeigen Sie, dass für jedes $\beta > 0$ die (differenzierbare) bosonische Besetzungszahlfunktion
$$N : (-\infty, \varepsilon) \to \mathbb{R} \text{ mit } N(\mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$
$N' > 0$ und $N'' > 0$ erfüllt. Welchen Bildbereich hat N?

4. Wenden Sie die Formel für den Teilchenzahlerwartungswert eines großkanonischen Dichteoperators wechselwirkungsfreier Bosonen
$$N(T, \mu) = \sum_{n \in I} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} - 1}$$
auf ein ideales Gas identischer Teilchen mit (ganzzahligem) Spin s in einem Würfel der Kantenlänge L an. Zeigen Sie für die Teilchenzahldichte bei $\beta = 1/kT > 0$ und $\mu < 0$, dass
$$\lim_{L \to \infty} \frac{N(T, \mu)}{L^3} = (2s + 1) \cdot \lambda_\theta^{-3} \cdot g_{3/2}\left(e^{\beta\mu}\right).$$

5. Für das großkanonische Potential eines idealen Gases von Schrödingerteilchen mit Spin s gilt
$$\Omega_\pm(T, V, \mu) = \mp (2s + 1) \cdot kT\lambda_\theta^{-3} \cdot g_{5/2}\left(\pm e^{\beta\mu}\right) \cdot V,$$
wobei Ω_+ das bosonische und Ω_- das fermionische Potential bezeichnet. Daraus folgt völlig analog zum in der Vorlesung behandelten bosonischen Fall mit $s = 0$, dass
$$\begin{aligned} E_\pm(T, V, \mu) &= \pm (2s + 1) \frac{3}{2} \cdot kT\lambda_\theta^{-3} \cdot g_{5/2}\left(\pm e^{\beta\mu}\right) \cdot V, \\ p_\pm(T, V, \mu) &= \frac{2}{3} \frac{E_\pm(T, V, \mu)}{V}, \\ N_\pm(T, V, \mu) &= \pm (2s + 1) \lambda_\theta^{-3} \cdot g_{3/2}\left(\pm e^{\beta\mu}\right) \cdot V \end{aligned}$$
Approximieren Sie $g_{5/2}(z)$ und $g_{3/2}(z)$ durch ihre Taylorpolynome der Ordnung 2 und bestimmen Sie $e^{\beta\mu}$ so, dass die Teilchendichte $N_\pm(T, V, \mu)/V$ den (positiven) Wert N/V annimmt. Welche Quantenkorrekturen ergeben sich daraus für die thermische und die kalorische Zustandsgleichungen des klassischen idealen Gases? Lösung:
$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{3}{2} NkT \left(1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N}{V} \cdot \frac{\lambda_\theta^3}{2s + 1}\right), \\ p_\pm &= \frac{NkT}{V} \left(1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N}{V} \cdot \frac{\lambda_\theta^3}{2s + 1}\right). \end{aligned}$$